TEMA 12

SUCESIONES Y SERIES

12.1 ***Una sucesión*** *es un conjunto de números ordenados bajo cierta regla específica*.

En muchos problemas cotidianos se presentan sucesiones, como por ejemplo los días del mes, ya que se trata del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 29, 30\}$; o bien cuando por alguna razón se tiene solamente al conjunto de los números pares $\{2, 4, 6, 8, 10, ... \}$; o quizás los nones $\{1, 3, 5, 7, 9, ... \}$, etc.

De cualquier forma, existe siempre una regla bajo la cual se forma el siguiente elemento de la sucesión a partir del primero. En el caso del conjunto de los pares y también de los nones, la regla es sumar 2 al último número formado. La primera parte del estudio de las sucesiones consistirá en descubrir por simple intuición cuál es dicha regla.

Ejemplo 1: Investigar la regla de formación de la siguiente sucesión:

$$7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...$$

Solución: Puede verse fácilmente que cada número se forma sumando 3 al que le precede, por lo que esa es la regla.

Ejemplo 2: Investigar la regla de formación de la siguiente sucesión:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...$$

Solución: En este ejemplo la sucesión está formada por los cuadrados de cada número natural.

Ejemplo 3: Investigar la regla de formación de la siguiente sucesión:

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Solución: Aquí cada número corresponde a la mitad del que le antecede. Esa es la regla.

Ejemplo 4: Investigar la regla de formación de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \ldots$$

Solución: En este caso cada numerador corresponde a la sucesión de los números naturales mientras que los denominadores son los cuadrados de 2, 3, 4, 5, 6, etc.

12.2 ELEMENTO GENERAL DE LA SUCESIÓN

El siguiente paso en el estudio de las sucesiones es encontrar una manera de escribir matemáticamente la regla de formación de una sucesión determinada, una vez que por intuición, como se hizo en el tema anterior, se descubrió ésta. A dicha fórmula se le llama *elemento general de la sucesión* , ya que a partir de él se pueden formar uno por uno todos los demás elementos.

El *elemento general de la sucesión* debe ser una función de n, en donde n solamente puede tomar valores enteros positivos, de tal manera que cuando se le dé el valor de $n = 1$, al sustituir en la fórmula se obtenga el primer elemento; que cuando $n = 2$, al sustituir en la fórmula se obtenga el segundo elemento; que cuando $n = 3$, al sustituir en la fórmula se obtenga el tercer elemento; y así sucesivamente.

Para obtener el elemento general cuando la regla de formación de la sucesión es sumar una cantidad fija, basta seguir estos dos pasos:

a) Poner como coeficiente de **n** ***a esa cantidad que se suma;***

b) agregar un segundo término independiente de **n*****, llamado desplazamiento, que es la cantidad que hace falta sumar al primer término de la fórmula para que cuando*** **n = 1** ***se obtenga el primer elemento.***

Ejemplo 1: Deducir la fórmula del elemento general de la siguiente sucesión:

5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

Solución: Se trata de los número nones a partir del 5, lo que significa que la regla de formación de esta sucesión es sumar 2. Por lo tanto, el primer término de la fórmula es **2*n***.

Para encontrar el segundo término de la fórmula buscada, o sea el desplazamiento, basta hacer ***n* = 1** en **2*n***, lo que da **2(1) = 2** y comparar con el primer elemento de la sucesión dada que es el **5**. La conclusión es que hay que sumar **3** al resultado obtenido en **2(1)** para llegar al **5** (primer elemento), el cual es el desplazamiento. Por lo tanto, el elemento general es

$$a_n = 2n + 3$$

COMPROBACIÓN:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = 2(1) + 3 = \mathbf{5}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = 2(2) + 3 = \mathbf{7}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = 2(3) + 3 = \mathbf{9}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = 2(4) + 3 = \mathbf{11}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = 2(5) + 3 = \mathbf{13}$	quinto elemento

Ejemplo 2: Deducir la fórmula del elemento general de la siguiente sucesión:

9, 12, 15, 18, 21, 24 ...

Solución: La regla de formación de esta sucesión es sumar 3. Por lo tanto, el primer término de la fórmula es **3*n***. Para encontrar el segundo término de esta fórmula, o sea el desplazamiento, basta hacer ***n* = 1** en **3*n*** lo que da **3(1) = 3** y comparar con el primer elemento de la sucesión dada que es el **9**. La conclusión es que hay que sumar **6** al resultado obtenido en **3(1)** para llegar al **9** (primer elemento).

Por lo tanto, el elemento general es $a_n = 3n + 6$

COMPROBACIÓN:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = 3(1) + 6 = \mathbf{9}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = 3(2) + 6 = \mathbf{12}$	segundo elemento

$n = 3$	$a_3 = 3(3) + 6 = \mathbf{15}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = 3(4) + 6 = \mathbf{18}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = 3(5) + 6 = \mathbf{21}$	quinto elemento

Ejemplo 3: Deducir la fórmula del elemento general de la siguiente sucesión:

$$- 3, 1, 5, 9, 13, 17 ...$$

Solución: La regla de formación de esta sucesión es sumar 4. Por lo tanto, el primer término de la fórmula es $4n$.

Para encontrar el segundo término de esta fórmula, o sea el desplazamiento, basta hacer $\boldsymbol{n = 1}$ en $\boldsymbol{4n}$, lo que da $4(1) = 4$ y comparar con el primer elemento de la sucesión dada que es el $- 3$. La conclusión es que hay que restar - 7 al resultado obtenido en $4(1)$ para llegar al - 3 (primer elemento).

Por lo tanto, el elemento general es $a_n = 4n - 7$

COMPROBACIÓN:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = 4(1) - 7 = \mathbf{-3}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = 4(2) - 7 = \mathbf{1}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = 4(3) - 7 = \mathbf{5}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = 4(4) - 7 = \mathbf{9}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = 4(5) - 7 = \mathbf{13}$	quinto elemento

Ejemplo 4: Deducir la fórmula del elemento general de la siguiente sucesión:

$$\frac{8}{5}, \frac{18}{6}, \frac{28}{7}, \frac{38}{8}, \frac{48}{9}, \ldots$$

Solución: La regla de formación del numerador de esta sucesión es sumar 10. Por lo tanto, el primer término de la fórmula es $\boldsymbol{10n}$.

Para encontrar el desplazamiento, o sea el segundo término de la fórmula en el numerador, basta sustituir $n = 1$ en 10n, lo que resulta $10(1) = 10$ y comparar con el numerador del primer elemento de la sucesión dada que es el 8. La conclusión es que hay que restar 2 al resultado obtenido en $10(1)$ para llegar al 8 (primer elemento).

Por lo tanto, el elemento general del numerador es $10n - 2$.

Por su parte, el denominador está formado por los números naturales a partir del 5, que equivale a sumar 1. El primer término del denominador es entonces ***n***.

Para encontrar el desplazamiento, o sea el segundo término de la fórmula en el denominador, basta sustituir $n = 1$ en n, lo que resulta 1 y comparar con el denominador del primer elemento de la sucesión dada que es el 5 . La conclusión es que hay que sumar 4 al resultado obtenido.

Por lo tanto, el elemento general del denominador es $n + 4$.

De manera que el elemento general de la sucesión dada es

$$a_n = \frac{10n - 2}{n + 4}$$

COMPROBACIÓN:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = \dfrac{10(1) - 2}{1 + 4} = \mathbf{\dfrac{8}{5}}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = \dfrac{10(2) - 2}{2 + 4} = \mathbf{\dfrac{18}{6}}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = \dfrac{10(3) - 2}{3 + 4} = \mathbf{\dfrac{28}{7}}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = \dfrac{10(4) - 2}{4 + 4} = \mathbf{\dfrac{38}{8}}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = \dfrac{10(5) - 2}{5 + 4} = \mathbf{\dfrac{48}{9}}$	quinto elemento

Ejemplo 5: Deducir la fórmula del elemento general de la siguiente sucesión:

$$\frac{9}{5}, \frac{16}{7}, \frac{25}{9}, \frac{36}{11}, \frac{49}{13}, \ldots$$

Solución: La regla de formación del numerador de esta sucesión son los cuadrados de los números naturales a partir del 3, o sea existe un desplazamiento de $+2$.

Por lo tanto, la fórmula del numerador es $\mathbf{(n+2)^2}$.

Por su parte, el denominador está formado por los números nones a partir del 5, que equivale a sumar 2. El primer término del denominador es entonces $\mathbf{2n}$.

Para encontrar el desplazamiento, o sea el segundo término de la fórmula en el denominador, basta sustituir $\mathbf{n=1}$ en $\mathbf{2n}$, lo que resulta $2(1)=2$ y comparar con el denominador del primer elemento de la sucesión dada que es el **5** . La conclusión es que hay que sumar **3** al resultado obtenido.

Por lo tanto, el elemento general del denominador es $\mathbf{2n+3}$

De manera que el elemento general de la sucesión dada es

$$a_n = \frac{(n+2)^2}{2n+3}$$

COMPROBACIÓN:

para	se obtiene	que es el
$n=1$	$a_1 = \dfrac{(1+2)^2}{2(1)+3} = \mathbf{\dfrac{9}{5}}$	primer elemento
$n=2$	$a_2 = \dfrac{(2+2)^2}{2(2)+3} = \mathbf{\dfrac{16}{7}}$	segundo elemento
$n=3$	$a_3 = \dfrac{(3+2)^2}{2(3)+3} = \mathbf{\dfrac{25}{9}}$	tercer elemento
$n=4$	$a_4 = \dfrac{(4+2)^2}{2(4)+3} = \mathbf{\dfrac{36}{11}}$	cuarto elemento
$n=5$	$a_5 = \dfrac{(5+2)^2}{2(5)+3} = \mathbf{\dfrac{49}{13}}$	quinto elemento

Ejemplo 6: Deducir la fórmula del elemento general de la siguiente sucesión:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

Solución: La regla de formación de esta sucesión es multiplicar por 2. En casos así en los que en vez de sumar una cantidad fija, se multiplica, el primer término está formado por dicha cantidad elevada a la potencia $\boldsymbol{n}$ y el desplazamiento debe localizarse en el mismo exponente.

De manera que, según la regla anterior, el elemento general sería $\mathbf{2^n}$, pero como cuando $\boldsymbol{n = 1}$ se obtiene $\mathbf{2^n = 2^1 = 2}$, se ve que hay un desplazamiento de un elemento hacia adelante; en otras palabras, es necesario regresar uno.

Por lo tanto, la fórmula del elemento general es $\boldsymbol{a_n = 2^{n-1}}$.

COMPROBACIÓN:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = \mathbf{1}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = 2^{2-1} = 2^1 = \mathbf{2}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = 2^{3-1} = 2^2 = \mathbf{4}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = 2^{4-1} = 2^3 = \mathbf{8}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = 2^{5-1} = 2^4 = \mathbf{16}$	quinto elemento

EJERCICIO 11

Deducir la fórmula de elemento general de las siguientes sucesiones:

1) $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}, \frac{13}{10}, \ldots$

2) 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, ...

3) - 8, - 4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, ...

4) 100, 95, 90, 85, 80, 75, 70, 65, ...

5) 51, 50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, ...

6) 11, 5, - 1, - 7, - 13, - 19, - 25, - 31, ...

7) $\frac{6}{7}, \frac{8}{10}, \frac{10}{13}, \frac{12}{16}, \frac{14}{19}, \frac{16}{22}, \ldots$

8) $\frac{0}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}, \frac{35}{6}, \ldots$

9) $\frac{1}{7}, \frac{2}{13}, \frac{3}{19}, \frac{4}{25}, \frac{5}{31}, \frac{6}{37}, \ldots$

10) $\frac{50}{6}, \frac{49}{7}, \frac{48}{8}, \frac{47}{9}, \frac{46}{10}, \frac{45}{11}, \ldots$

11) $-\frac{3}{2}, \frac{2}{4}, \frac{7}{8}, \frac{12}{16}, \frac{17}{32}, \frac{22}{64} \quad \frac{27}{128}, \ldots$

12) -2 , 4, - 8, 16, - 32, 64, - 128, ...

13) $\frac{2}{35}, \frac{4}{31}, \frac{6}{27}, \frac{8}{23}, \frac{10}{19}, \ldots$

14) $\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{5}{2}\right)^3, \left(\frac{7}{2}\right)^4, \left(\frac{9}{2}\right)^5, \ldots$

15) $\frac{1^3}{3^1}, \frac{2^4}{4^2}, \frac{3^5}{5^3}, \frac{4^6}{6^4}, \frac{5^7}{7^5}, \ldots$

12.3 PROBLEMA INVERSO

El problema inverso a lo estudiado en el tema anterior consiste en que dada la fórmula del elemento general de una serie, a partir de ella se escriban los primeros ***k*** elementos.

Ejemplo 1: Escribir los primeros cinco elementos de la sucesión:

$$a_n = 3n + 2$$

Solución:

para	se obtiene	que es el
$n = 1$	$a_1 = 3(1) + 2 = \mathbf{5}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = 3(2) + 2 = \mathbf{8}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = 3(3) + 2 = \mathbf{11}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = 3(4) + 2 = \mathbf{14}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = 3(5) + 2 = \mathbf{17}$	quinto elemento

Por lo tanto, los cinco primeros elementos son:

$$5, 8, 11, 14, 17, ...$$

Ejemplo 2: Escribir los primeros seis elementos de la sucesión:

$$a_n = \frac{2n - 7}{n^2}$$

Solución:

para	se obtiene	que es el
$n = 1$	$a_n = \frac{2(1) - 7}{1^2} = -\frac{5}{1}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = \frac{2(2) - 7}{2^2} = -\frac{3}{4}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = \frac{2(3) - 7}{3^2} = -\frac{1}{9}$	tercer elemento
$n = 4$	$a_4 = \frac{2(4) - 7}{4^2} = \frac{1}{16}$	cuarto elemento
$n = 5$	$a_5 = \frac{2(5) - 7}{5^2} = \frac{3}{25}$	quinto elemento

para	se obtiene	que es el
$n = 6$	$a_6 = \dfrac{2(6)-7}{6^2} = \dfrac{5}{36}$	sexto elemento

Por lo tanto, los seis primeros elementos son:

$$-\frac{5}{1}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{3}{25}, \frac{5}{36}, \ldots$$

Ejemplo 3: Escribir los primeros tres elementos de la sucesión:

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{n}$$

Solución:

para	se obtiene	que es el
$n = 1$	$a_1 = \dfrac{3^{1-1}}{1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$	primer elemento
$n = 2$	$a_2 = \dfrac{3^{2-1}}{2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$	segundo elemento
$n = 3$	$a_3 = \dfrac{3^{3-1}}{3} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}$	tercer elemento

Por lo tanto, los tres primeros elementos son:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{9}{3}, \ldots$$

Que también se puede escribir así:

$$\frac{3^0}{1}, \frac{3^1}{2}, \frac{3^2}{3}, \ldots$$

EJERCICIO 12

Escribir los primeros cinco elementos de las sucesiones:

1) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{4}$

2) $a_n = \dfrac{(n-2)(n+4)}{n+3}$

3) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

4) $a_n = \dfrac{3n-17}{2n+5}$

5) $a_n = 2n^2(-1)^n$

6) $a_n = (-1)^{n+1}(n+1)^2$

7) $a_n = (-2)^n(2n+3)^2$

8) $a_n = (-1)^n(2n+4)^2$

9) $a_n = n^2 - 1$

12.4 SERIES

Las sucesiones vistas como sucesiones nada más, no sirven realmente para nada, no aportan nada en la resolución de problemas; si acaso su única utilidad es el ejercicio mental que con ellas se puede realizar, como lo fue en los ejercicios anteriores.

Cuando los elementos de una sucesión se suman se convierten en ***series*** y es allí en donde aparece lo verdaderamente utilizable desde el punto de vista matemático. Se podría decir que para no tratar con desprecio a las sucesiones, puede afirmarse que éstas son las madres de las series porque a partir de las sucesiones se forman las series.

> ***Una serie*** *es la suma de los elementos de una sucesión.*

Como en Álgebra un **término** es cada cantidad que se está sumando, entonces en una serie, en vez de elementos habrá términos. Es incorrecto en una sucesión llamarles "términos" a los elementos porque éstos no se están sumando, en cambio, en una serie sí son estrictamente términos.

Las series pueden ser finitas o infinitas. Cuando se trata de series infinitas, para indicar que continúa así indefinidamente se escriben puntos suspensivos.

Ejemplos de series finitas son las siguientes:

1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
2) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$
3) $3 + 8 + 13 + 18 + 23$

Ejemplos de series infinitas son las siguientes:

4) $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + ...$
5) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + ...$
6) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ...$

Como una serie es la suma de los elementos de una sucesión, entonces las reglas vistas anteriormente para las sucesiones son aplicables a las series con la única diferencia que debe hacerse la suma. Es decir, si en las sucesiones existe la fórmula del elemento general que es el que da la regla de formación, en las series es lo mismo, solamente que se llama ***término general*** .

En una serie, se define la suma de los primeros $\boldsymbol{n}$ términos como $\boldsymbol{s_n}$.

Por ejemplo, en la serie definida por el término general $a_n = 4n + 5$, se tiene que

la suma de los dos primeros términos es $s_2 = 9 + 13$
la suma de los cuatro primeros términos es $s_4 = 9 + 13 + 17 + 21$
la suma de los seis primeros términos es $s_6 = 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29$

y así sucesivamente.

12.4.1 SUMATORIAS

Como una serie es una sumatoria de términos, ésta se puede escribir con el símbolo universal de sumatoria en Matemáticas, o sea

$$\sum_{n=a}^{b} a_n$$

que significa que se deben sumar los términos que resulten desde que $\boldsymbol{n = a}$ hasta $\boldsymbol{n = b}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los números definidos que limitan desde qué valor hasta qué otro valor deberá efectuarse la suma.

Ejemplo 1: Efectuar la sumatoria $\sum_{n=1}^{4} 7n - 11$

Solución: Significa que deben sumarse los términos que resulten haciendo $\boldsymbol{n = 1}$ hasta $\boldsymbol{n = 4}$, esto es:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = 7(1) - 11 = \mathbf{-4}$	primer término
$n = 2$	$a_2 = 7(2) - 11 = \mathbf{3}$	segundo término
$n = 3$	$a_3 = 7(3) - 11 = \mathbf{10}$	tercer término
$n = 4$	$a_4 = 7(4) - 11 = \mathbf{17}$	cuarto término

de manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} 7n - 11 = -4 + 3 + 10 + 17 = 26$

Ejemplo 2: Efectuar la sumatoria $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} n^2 - 3n$

Solución: Significa que deben sumarse los términos que resulten haciendo $\boldsymbol{n = 1}$ hasta $\boldsymbol{n = 5}$, esto es:

para	**se obtiene**	**que es el**
$n = 1$	$a_1 = 1^2 - (3)1 = \mathbf{-2}$	primer término
$n = 2$	$a_2 = 2^2 - (3)2 = \mathbf{-2}$	segundo término
$n = 3$	$a_3 = 3^2 - (3)3 = \mathbf{0}$	tercer término
$n = 4$	$a_4 = 4^2 - (3)4 = \mathbf{4}$	cuarto término
$n = 5$	$a_5 = 5^2 - (3)5 = \mathbf{10}$	quinto término

de manera que

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 - 3n = -2 - 2 + 0 + 4 + 10 = 14$$

EJERCICIO 13

Efectuar las sumatorias indicadas:

1) $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n}$

2) $\sum_{n=1}^{4} (2n + 1)$

3) $\sum_{n=3}^{6} n^2 - n$

4) $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{3}$

5) $\sum_{n=3}^{6} \frac{n+1}{n+2}$

6) $\sum_{n=2}^{5} \frac{n+3}{n(n+1)}$

7) $\sum_{n=6}^{9} (-1)^n n^2$

8) $\sum_{n=1}^{4} (-n)^n$

9) $\sum_{n=2}^{4} (-2)^n n^3$

10) $\sum_{n=3}^{6} (5 - n)^n$

11) $\sum_{n=5}^{8} (-1)^n 2^3$

12) $\sum_{n=1}^{4} (2^n + n^2)$

13) $\sum_{n=1}^{4} (n-1)(n+2)$

14) $\sum_{n=1}^{4} \left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n}\right)$

12.4.2 FORMULA GENERAL DE UNA SERIE

Las series, que como ya se dijo son la suma de los términos que resultan de una sucesión, tienen una fórmula general con la cual se puede obtener la suma de los términos indicados sin necesidad de efectuar la suma misma.

En dicha fórmula, la ***n*** se interpreta de dos formas, según se trate de la expresión escrita al lado izquierdo del signo "igual" o de la escrita a la derecha, de la siguiente manera:

cuando:	***en el lado izquierdo:***	***en el lado derecho:***
$n = 1$	se obtiene el primer término.	se obtiene el resultado de la suma del primer término.
$n = 2$	se obtienen el segundo término.	se obtiene el resultado de la suma de los dos primeros términos.
$n = 3$	se obtienen el tercer término.	se obtiene el resultado de la suma de los tres primeros términos.

y así sucesivamente.

Por lo pronto el alumno no debe preocuparse por saber de dónde o cómo se obtuvo dicha fórmula, sino de saberla aplicar conforme a los ejemplos que siguen.

Ejemplo 1: Obtener la suma de los primeros 15 términos de

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Solución: Lo primero que debe definirse es el último término del lado izquierdo, o sea el término 15º , haciendo $n = 15$ en el término general $(2n - 1)$, el cual es: $2(15) - 1 = 29$.

Es indispensable definir en el lado izquierdo hasta qué número se desea sumar, es decir el último término de la suma que se quiere obtener su resultado, ya que de lo contrario carecería de sentido hablar del resultado de algo indefinido. Es el equivalente a decir nada más: *"hay que sumar* 1 + 3 + 5 *, etcétera*". Siempre surgiría la pregunta: “¿Hasta dónde”?

La suma de los primeros quince términos de la serie se obtiene aplicando la fórmula, con $n = 15$ en el lado derecho. Debe entenderse que el objetivo de la fórmula es obtener el resultado de la suma sin efectuarla, sobretodo cuando el número de términos a sumarse es grande y resulta fastidioso hacer realmente la suma.

De manera que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + 29 &= 15^2 \\ &= 225 \end{aligned}$$

Nótese que en el lado izquierdo del segundo renglón no debe ponerse el valor de 225, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + ... + 29 &= 15^2 \\
225 &= 225 \quad \textbf{¡falso!}
\end{aligned}
$$

Es falso, no en el sentido de que doscientos veinticinco no sea igual a doscientos veinticinco, lo que es verdadero, sino en el sentido de que en ese lado izquierdo no se realizó ninguna operación; simplemente se está afirmando que la suma de $1 + 3 + 5 + ...$ hasta $+ 29$ es igual a 225. Ponerlo significa que en el lado izquierdo se realizó la operación suma de cada término y eso es falso. También obsérvese que debe ponerse en concreto el decimoquinto término, en este caso el $+ 29$, que se obtuvo de sustituir $n = 15$ en el término general $2n - 1$

Ejemplo 2: Obtener la suma de los primeros 75 términos de

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución: Lo primero que debe definirse es el último término del lado izquierdo, o sea el término septuagésimo quinto, haciendo $n = 75$ en el término general n, el cual es 75.

Es indispensable definir en el lado izquierdo hasta qué número se desea sumar, es decir el último término de la suma que se quiere obtener su resultado, ya que de lo contrario carecería de sentido hablar del resultado de algo indefinido. Equivaldría a decir nada más: *"hay que sumar* 1 + 2 + 3 *, etcétera*". Siempre surgiría la pregunta: "¿Hasta dónde"?.

La suma de los primeros setenta y cinco términos de la serie se obtiene aplicando la fórmula, con $n = 75$ en el lado derecho. Debe entenderse que el objetivo de la fórmula es obtener el resultado de la suma sin efectuarla, sobretodo cuando el número de términos a sumarse es grande y resulta fastidioso hacer realmente la suma.

De manera que

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \dots + 75 &= \frac{75(75 + 1)}{2} \\
&= 2850
\end{aligned}
$$

Nótese que en el lado izquierdo **NO** debe ponerse el valor de 2850 de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + ... + 75 &= \frac{75(75 + 1)}{2} \\
2850 &= 2850 \quad \textbf{¡falso!}
\end{aligned}
$$

Es falso, no en el sentido de que dos mil ochocientos cincuenta no sea igual a dos mil ochocientos cincuenta, lo que es verdadero, sino en el sentido de que en ese lado izquierdo no se realizó ninguna operación; simplemente se está afirmando que la suma de $1 + 2 + 3 + 4 + ...$ hasta 75 es igual a 2850. Ponerlo significa que en el lado izquierdo se realizó la operación suma de cada término y eso es falso.

También obsérvese que debe ponerse en concreto el septuagésimo quinto término, en este caso el 75 que se obtuvo de sustituir $n = 75$ en el término general n .

Ejemplo 3: Obtener la suma de los primeros diez y seis términos de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Solución: Lo primero que debe definirse es el último término del lado izquierdo, o sea el término 16º haciendo $n = 16$ en el término general $\frac{1}{2^{n-1}}$, el cual es $\frac{1}{2^{16-1}} = \frac{1}{32\,768}$.

La suma de los primeros diez y seis términos de la serie se obtiene aplicando la fórmula, con $n = 16$ en el lado derecho. Debe entenderse que el objetivo de la fórmula es obtener el resultado de la suma sin efectuarla, sobretodo cuando el número de términos a sumarse es grande y resulta fastidioso hacer realmente la suma.

De manera que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{32\,768} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{32\,768} = 2\left(1 - \frac{1}{65\,536}\right)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{32\,768} = \frac{131\,070}{65\,536}$$

EJERCICIO 14

Obtener la suma de los primeros veinte términos de:

1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \quad = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

2) $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots. + \quad = n(n+1)$

4) $1 + 4 + 7 + \ldots\ldots + \quad = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

5) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots.. + \quad = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$

6) $6 + 4 + 2 + \ldots + \quad = n(7 - n)$

7) $-2 - 16 - 30 - \ldots. - \quad = n(5 - 7n)$

8) $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

9) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{3}{4}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$

12.5 PROGRESIONES

Un caso particular de series de mucha aplicación práctica es el de las llamadas progresiones, de las cuales se estudiarán en este curso solamente las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas.

12.5.1 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una *progresión aritmética* (p.a.) es aquella en la que cada término, después del primero, se forma sumando una cantidad fija al término precedente. A dicha cantidad fija se le llama *diferencia* .

Ejemplos de *progresiones aritméticas* son los siguientes:

- $5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 + ...$ (diferencia: + 6)
- $21 + 11 + 1 - 9 - 19 - 29 - ...$ (diferencia: - 10)

12.5.1.1 FÓRMULAS

En las progresiones aritméticas existen cinco variables: el primer término, el último término, el número de términos, la diferencia y la suma de todos esos términos. Conocidas tres de ellas se pueden calcular las otras dos con la utilización de las tres fórmulas que se deducirán a continuación:

Sean: a = primer término de la p.a.
ℓ = último término de la p.a.
n = número de términos
d = diferencia de la p. a.
s = suma de los n términos.

Entonces el primer término es a
el segundo término es $a + d$
el tercer término es $a + d + d = a + 2d$
el cuarto término es $a + 2d + d = a + 3d$
el quinto término es $a + 3d + d = a + 4d$

y así sucesivamente.

De manera que, considerando que se tienen n términos, el último término es

$$\boxed{\ell = a + (n - 1)\, d} \qquad (1)$$

La suma de los n términos viene dada por la fórmula

$$\boxed{s = \frac{n}{2}\left(a + \ell\right)} \qquad (2)$$

o bien, sustituyendo (1) en (2):

$$\boxed{s = \frac{n}{2}\left[2a + \left(n - 1\right)d\right]} \qquad (3)$$

Con esas fórmulas, conocidas tres de las cinco variables, se pueden calcular las otras dos.

Ejemplo 1: El primer término de una p.a. es 22 y el último 58. Sabiendo que consta de 17 términos, hallar la diferencia y la suma de esos 17 términos.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $\boldsymbol{a = 22}$; $\boldsymbol{\ell = 58}$; $\boldsymbol{n = 17}$. Para obtener la diferencia $\boldsymbol{d}$ se utiliza la fórmula (1):

$$\ell = a + \left(n - 1\right)d$$

sustituyendo valores:

$$58 = 22 + (17 - 1)d$$
$$58 = 22 + 16d$$
$$36 = 16d$$
$$d = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

y para obtener la suma de esos diecisiete términos, con la fórmula

$$s = \frac{n}{2}\left(a + \ell\right)$$

sustituyendo valores:

$$s = \frac{17}{2}\left(22 + 58\right)$$

$$s = 680$$

Ejemplo 2: El primer término de una p.a. es -3 y el último 45. Sabiendo que la suma de todos sus términos es de 273, calcular el número de términos de que consta dicha progresión y escribirla completa.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $\boldsymbol{a = -3}$; $\boldsymbol{\ell = 45}$; $\mathbf{s = 273}$. Para obtener el número de términos de que consta se utiliza la fórmula:

$$\boldsymbol{s = \frac{n}{2}(a + \ell)}$$

sustituyendo valores:

$$273 = \frac{n}{2}(-3 + 45)$$

$$273 = \frac{n}{2}(42)$$

$$n = 13$$

y para escribir completa la progresión aritmética se requiere saber la diferencia. Calculándola con la fórmula

$$\boldsymbol{\ell = a + (n - 1)d}$$

sustituyendo valores:

$$45 = -3 + (13 - 1)d$$
$$45 = -3 + 12d$$
$$48 = 12d$$
$$\mathrm{d} = 4$$

así que la p.a. completa referida es:

$$-3 + 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 + 45$$

Conviene comprobar con la calculadora que efectivamente la suma de todos estos términos da el resultado obtenido a través de la fórmula, o sea s = 273.

Ejemplo 3: Para la p.a. - 9 - 4 + 1 + 6 + ... , calcular la suma de los primeros 10 términos y el último término dicha progresión y escribirla completa.

solución: En esta caso se tienen conocidos $\boldsymbol{a = -9}$; $\boldsymbol{n = 10}$; $\boldsymbol{d = 5}$ (basta restar un término menos el anterior). Para obtener la suma de los primeros 10 términos se utiliza la fórmula:

$$\boldsymbol{s = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)d\right]}$$

sustituyendo:

$$s = \frac{10}{2}\left[2(-9) + (10 - 1)5\right]$$

$$s = 5\left[-18 + (9)5 \right]$$
$$s = 5\,(-18 + 45)$$
$$s = 135$$

Para calcular el último término se emplea la fórmula

$$\boldsymbol{\ell = a + (n - 1)\,d}$$

sustituyendo:

$$\ell = -9 + (10 - 1)5$$
$$\ell = -9 + (9)5$$
$$\ell = -9 + 45$$
$$\ell = 36$$

de manera que la progresión aritmética completa es

$$-9 - 4 + 1 + 6 + 11 + 16 + 21 + 26 + 31 + 36$$

Conviene comprobar con la calculadora que efectivamente la suma de todos estos términos da el resultado obtenido a través de la fórmula, o sea $s = 135$.

Ejemplo 4: Una p.a. que consta de 14 términos, comienza en -26. Si la suma de sus 14 términos es cero, calcular el último término y escribirla toda completa para explicarse por qué la suma da cero.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $\boldsymbol{a = -26}$; $\boldsymbol{n = 14}$; $\boldsymbol{s = 0}$. Para obtener el número de términos de que consta, utiliza la fórmula:

$$\boldsymbol{s = \frac{n}{2}(a + \ell)}$$

sustituyendo:

$$0 = \frac{14}{2}\left(-26 + \ell\right)$$

$$0 = 7\left(-26 + \ell\right)$$

$$0 = -26 + \ell$$

$$\ell = 26$$

para escribir completa la p.a. se requiere saber la diferencia. Calculándola con la fórmula

$$\boldsymbol{\ell = a + (n - 1)\,d}$$

sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}26 &= -26 + (14-1)d\\ 26 &= -26 + 13d\\ 52 &= 13d\\ d &= 4\end{aligned}$$

así que la progresión aritmética completa es:

$$-26 - 22 - 18 - 14 - 10 - 6 - 2 + 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26$$

Es fácil ver que la suma da cero, ya que es simétrica, es decir, para cada número positivo existe uno negativo que al sumarse se anulan.

Ejemplo 5: Una progresión aritmética termina en 13. Si la suma de sus términos es $s = 76$ y la diferencia es $d = 1$, calcular el primer término y el número de términos de que consta.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $\boldsymbol{\ell = 13}$ **;** $\boldsymbol{s = 76}$ **;** $\boldsymbol{d = 1}$. Para obtener el primer término, se utiliza la fórmula:

$$\boldsymbol{s = \frac{n}{2}\left(a + \ell\right)}$$

sustituyendo:

$$76 = \frac{n}{2}\left(a + 13\right)$$

$$152 = n\,(a + 13) \qquad (6.1)$$

Resulta una ecuación con dos incógnitas. Entonces, de acuerdo a la ley de las ecuaciones que dice que *"se necesitan tantas ecuaciones como incógnitas se tengan para que el sistema tenga solución",* se requieren dos ecuaciones. La segunda se obtiene, igual que la anterior, con otra de las fórmulas de progresiones aritméticas.

De manera que empleando ahora la fórmula

$$\boldsymbol{\ell = a + \left(n - 1\right)d}$$

y sustituyendo:

$$\begin{aligned}13 &= a + (n-1)1\\ 13 &= a + n - 1\\ a &= 14 - n \qquad (6.2)\end{aligned}$$

Se tienen ya dos ecuaciones con dos incógnitas, de manera que sustituyendo el valor de (6.2) en la ecuación (6.1), se obtiene que

$$\begin{aligned}152 &= n\,(14 - n + 13)\\ 152 &= \mathrm{n}\,(27 - n)\\ 152 &= 27n - n^2\\ n^2 - 27n + 152 &= 0\end{aligned}$$

Se trata de una ecuación de segundo grado que se resuelve con la fórmula de segundo grado:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4(1)(152)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{27 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$n = \frac{27 \pm 11}{2}$$

$$n_1 = 19$$

$$n_2 = 8$$

Como se obtuvieron dos soluciones, significa que existen dos progresiones aritméticas que tienen como último término **ℓ = 13,** diferencia ***d* = 1** y cuya suma es ***s* = 76**.

Efectivamente, esas dos progresiones aritméticas son:

a) Para $n = 19$

El primer término, sustituyendo en la fórmula $\ell = a + (n - 1)\,d$, es

$$13 = a + (19 - 1)(1)$$
$$13 = a + 18$$
$$a = -5$$

Por lo tanto, la primera progresión es:

$$-5 - 4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$$

cuya suma se puede obtener fácilmente sumando únicamente del + 6 hasta el + 13, ya que los demás términos se anulan por pares, ya que existe un - 5 y un + 5 que se anulan, un - 4 y un + 4 que se anulan, etc. Así que la suma se reduce a

$$s = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 76$$

que se puede obtener también con la fórmula

$$\boldsymbol{s = \frac{n}{2}(a + \ell)}$$

$$s = \frac{19}{2}\left(-5 + 13\right)$$
$$s = 76$$

b) Para $n = 8$

El primer término, sustituyendo en la fórmula $\ell = a + (n - 1)\, d$, es

$$13 = a + (8 - 1)(1)$$
$$13 = a + 7$$
$$a = 6$$

Por lo tanto, la progresión es:

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$$

cuya suma es la misma que en la caso anterior, es decir

$$s = 6 + 7 +8 +9 +10 + 11 + 12 + 13 = 76$$

Ejemplo 6: El cuarto término de una p.a. es 3 y el décimo es 5. Calcular la suma de los primeros 13 términos.

Solución: Para resolver este problema existen dos métodos:

método 1: Se basa en que cualquier parte o subconjunto de una progresión aritmética es a su vez por sí misma una progresión aritmética con la misma diferencia d que la total. Por ejemplo, de la p.a. $5 + 7 +9 + 11 + 13 + 15 + 17$, el subconjunto $7 + 9 +11$ es por sí misma una progresión aritmética con la misma diferencia $d = 2$ que la original.

De tal manera que si el cuarto término de una p.a. es 3 y el décimo es 5, puede considerarse este segmento como una p.a. por sí misma, o sea, como si el primer término fuera $a = 3$ y el último $\ell = 5$, con $n = 7$ términos. A partir de ellos puede obtenerse su diferencia, que es la misma de la p.a. original. De manera que utilizando la fórmula

$$\ell = a + (n - 1)d$$

sustituyendo valores:

$$5 = 3 + (7 - 1)d$$
$$5 = 3 + 6d$$
$$2 = 6d$$
$$d = \frac{1}{3} \quad \mathrm{d} = \frac{1}{3}$$

Ahora considerando el subconjunto que va del primero al cuarto término, se tiene que

$$n = 4 \ , \quad \ell = 3 \quad \text{y} \quad d = \frac{1}{3} \ ,$$

con lo que puede calcularse su primer término con la fórmula

$$\ell = a + (n - 1)d$$

sustituyendo valores:

$$3 = a + (4 - 1)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$3 = a + 3\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$a = 2$$

Este primer término también es el primer término de la p.a. original, de manera que en este momento ya se tienen los siguientes datos sobre la p.a. original:

$$a = 2$$

$$d = \frac{1}{3}$$

$$n = 13$$

de manera que para obtener la suma de esos primeros términos se emplea la fórmula

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)\, d\right]$$

y sustituyendo valores:

$$s = \frac{13}{2}\left[2(2) + (13 - 1)\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$s = \frac{13}{2}\left[4 + (12)\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$s = 52$$

método 2: Se basa en la definición de cada término, o sea que

el primer término es	a
el segundo término es	$a + d$
el tercer término es	$a + 2d$

el cuarto término es $a + 3d$
el quinto término es $a + 4d$

etc.,

de tal manera que el cuarto término es

$$a + 3d = 3 \tag{6.3}$$

y el décimo término es

$$a + 9d = 5 \tag{6.4}$$

de manera que se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas

$$a + 3d = 3 \quad (6.3)$$
$$a + 9d = 5 \quad (6.4)$$

por suma y resta, cambiándole de signo a la primera ecuación se obtiene

$$\begin{array}{r} -a + 3d = -3 \\ \underline{a + 9d = 5} \\ 6d = 2 \end{array}$$

$$d = \frac{1}{3}$$

sustituyendo en la ecuación (6.3) :

$$a + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 3$$
$$a + 1 = 3$$
$$a = 2$$

Así que la suma de los primeros trece términos, con $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{d = \frac{1}{3}}$ y $\boldsymbol{n = 13}$, se obtiene con la fórmula

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n - 1)\,d\right]$$

y sustituyendo valores:

$$s = \frac{13}{2}\left[2(2) + (13-1)\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$s = \frac{13}{2}\left[4 + (12)\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$s = 52$$

EJERCICIO 15

En los siguientes problemas, calcular las dos variables que faltan.

1) $a = 4$; $\ell = 25$; $n = 30$
2) $a = 3$; $\ell = 6$; $s = 45$
3) $a = -6$; $\ell = 12$; $d = \frac{3}{2}$
4) $a = -4$; $n = 17$; $s = -\frac{15}{2}$
5) $a = 14$; $n = 13$; $d = 3$
6) $a = 2$; $s = 11$; $d = -\frac{1}{5}$
7) $\ell = 0$; $n = 11$; $s = 11$
8) $\ell = -1$; $n = 7$; $d = -\frac{1}{3}$
9) $n = 12$; $s = 2$; $d = -\frac{1}{3}$
10) $\ell = 122$; $s = 434$; $d = 20$
11) El segundo término de una p.a es 30 y el octavo es 44, Obtener la suma de los primeros catorce términos de dicha progresión.
12) El tercer término de una p.a es 13 y el sexto es 25, Obtener la suma de los primeros doce términos de dicha progresión.
13) El tercer término de una p.a es 17 y el undécimo es 20, Obtener la suma de los primeros veinte términos de dicha progresión.

12.5.2 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Lo interesante de las progresiones está en las aplicaciones que tienen a problemas prácticos. Dado un problema, el procedimiento que debe seguirse para resolverlo es bastante sencillo, pues basta identificar los datos del enunciado y asignarlos a la variable que le corresponde; dicho de otra forma, se trata de transformar los datos y la pregunta del problema dados con palabras, ya sea en el primer término de una progresión aritmética, o en el último, o en la suma, o en la diferencia o en el número de términos, para después aplicar la fórmula correspondiente, conforme a la pregunta. Al final, es indispensable contestar la pregunta con palabras.

Ejemplo 1: Un obrero comienza a trabajar con un salario de $2 500.00 al mes durante el primer año, con el convenio de que recibirá un aumento anual de $635.00. ¿Cuál será su sueldo al cabo de 7 años de servicio?

Solución: Se tienen los siguientes datos: $a = 2\,500$; $n = 7$ y $d = 635$, mientras que lo que se pregunta se trata del último término de una p.a. De manera que con la fórmula

$$\ell = a + (n-1)d$$

sustituyendo valores:

$$\ell = 2500 + (7 - 1)(635)$$
$$\ell = 2500 + 6(635)$$
$$\ell = 2500 + 3810$$
$$\ell = 6310$$

Al cabo de siete años su sueldo será de $ 6 310.00

Ejemplo 2: Una pelota rueda sobre un plano inclinado y recorre dos metros durante el primer segundo. En cada segundo posterior recorre 3.5 metros más que en el segundo inmediato anterior. ¿Qué distancia habrá recorrido durante los primeros seis segundos?

Solución: Se tienen los siguientes datos: $a = 2$; $n = 6$ y $d = 3.5$, mientras que lo que se pregunta se trata de la suma de los primeros seis términos de una p.a. De manera que con la fórmula

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

sustituyendo valores:

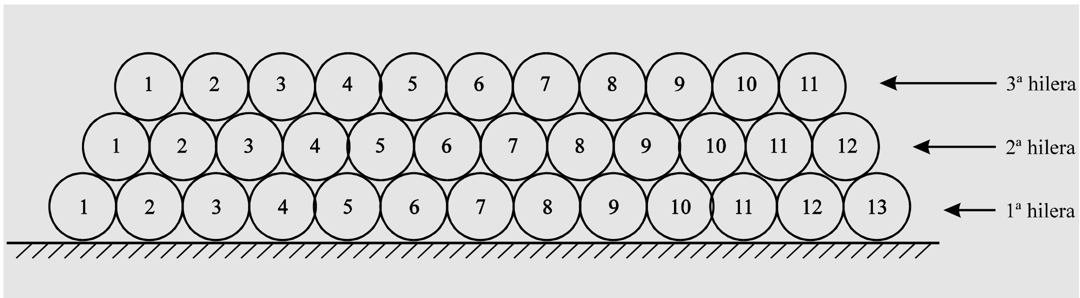
$$s = \frac{6}{2}\left[2(2) + (6-1)(3.5)\right]$$

$$s = 3\left[4 + (5)(3.5)\right]$$

$$s = 3(4 + 17.5)$$
$$s = 64.5$$

Al cabo de seis segundos habrá recorrido una distancia de 64.5 metros.

Ejemplo 3: Se acomodan 85 postes en forma piramidal, colocando 13 postes en la hilera del piso; luego 12 en la siguiente y así sucesivamente.¿De cuántas hileras consta el arreglo y cuántos postes tiene la hilera de hasta arriba?



Solución: Si se considera a la fila del piso como el primer término de la progresión aritmética, se tienen los siguientes datos: $a = 13$; $s = 85$ y $d = -1$, mientras que lo que se pregunta se trata del número de términos de la p.a. (las filas) y del último término (el número de postes de la fila de arriba). De manera que con la fórmula

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$$

la variable n representa el número de filas; así que sustituyendo valores:

$$85 = \frac{n}{2}\left[2(13) + (n-1)(-1)\right]$$

$$85 = \frac{n}{2}\left[26 - n + 1\right]$$

$$85 = \frac{n}{2}(27 - n)$$

$$170 = n(27 - n)$$

$$170 = 27n - n^2$$

$$n^2 - 27n + 170 = 0$$

Se trata de una ecuación de segundo grado que se resuelve con la fórmula general, obteniéndose dos soluciones:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4(1)(170)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 680}}{2}$$

$$n = \frac{27 \pm 7}{2}$$

$$n_1 = \frac{34}{2}$$

$$n_1 = 17$$

y la segunda solución es

$$n_2 = \frac{27 - 7}{2}$$

$$n_2 = \frac{20}{2}$$

$$n_2 = 10$$

Para deducir cuál de las dos soluciones de la ecuación de segundo grado resuelta es la que corresponde, como n es el número de filas del arreglo de los postes, basta analizar con cada uno de los valores e interpretarlo.

Para $n = 17$, es decir, si se supone que existen 17 filas, como la primera (la del piso) tiene 13 postes, la siguiente tiene uno menos y así sucesivamente, a lo más que se puede llegar es hasta la décima tercera fila que tendría un solo poste. Por lo tanto, como no puede ser que $n = 17$, el valor buscado es el otro, o sea $n = 10$. Hay 10 filas.

El último término (el número de postes de la fila de arriba) se obtiene con la fórmula

$$\ell = a + (n - 1)d$$

sustituyendo:

$$\ell = 13 + (10 - 1)(- 1)$$
$$\ell = 13 - 9$$
$$\ell = 4$$

Las respuestas a las preguntas son: El arreglo consta de 10 filas y en la fila de arriba se acomodaron 4 postes.

Ejemplo 4: Una persona debe pagar una deuda de \$ 2 100 en pagos mensuales durante un año, a condición de que cada mes pague \$10.00 más que la vez anterior. ¿Cuánto debe pagar la primera vez?

Solución: Se tienen los siguientes datos: $s = 2\ 100$; $n = 12$ y $d = 10$, mientras que lo que se pregunta se trata del primer término de una p.a. De manera que con la fórmula

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + \left(n-1\right)d\right]$$

sustituyendo valores:

$$2100 = \frac{12}{2}\left[2a + \left(12-1\right)\left(10\right)\right]$$

$$2100 = 6\ (2a + 110\ )$$

$$\frac{2100}{6} = 2a + 110$$

$$\begin{aligned} 350 &= 2a + 110 \\ 2a &= 350 - 110 \\ 2a &= 240 \\ a &= 120 \end{aligned}$$

La respuesta a la pregunta es: El primer pago debe ser de \$ 120.00

COMPROBACIÓN:

Los doce pagos mensuales son:

$$120 + 130 + 140 + 150 + 160 + 170 + 180 + 190 + 200 + 210 + 220 + 230 =$$

$$= 2100$$

EJERCICIO 16

1) Una persona que ahorra sistemáticamente deposita cierta cantidad de dinero en su alcancía; luego, al mes siguiente deposita \$ 5 000.00 más que la vez anterior, y así sucesivamente durante seis veces en total, hasta acumular \$141 000.00. ¿Cuál fue la primera cantidad que depositó? Nota: Entiéndase por “seis veces” las acciones de ir a depositar dinero a la alcancía, la que incluye la primera vez.

2) Una persona tiene que depositar inicialmente en su alcancía \$15 000.00; a la siguiente semana tiene que depositar la misma cantidad más algo adicional (fijo), y así sucesivamente durante 9 veces. ¿Cuánto es lo que debe añadir cada vez al depósito anterior para que al cabo de esas nueve ocasiones tenga acumulados \$180 000.00?

3) Se deja caer un objeto desde un aeroplano y durante el primer segundo cae 9.81 metros. Durante cada segundo posterior cae 9.81 metros más que en el segundo anterior. Si tarda siete segundos en llegar al piso, ¿a qué altura se encontraba el aeroplano?

4) Se deja caer un objeto desde un aeroplano y durante el primer segundo cae 9.81 metros. Durante cada segundo posterior cae 9.81 metros más que en el segundo anterior. ¿Cuántos metros recorrerá durante los primeros 6 segundos?

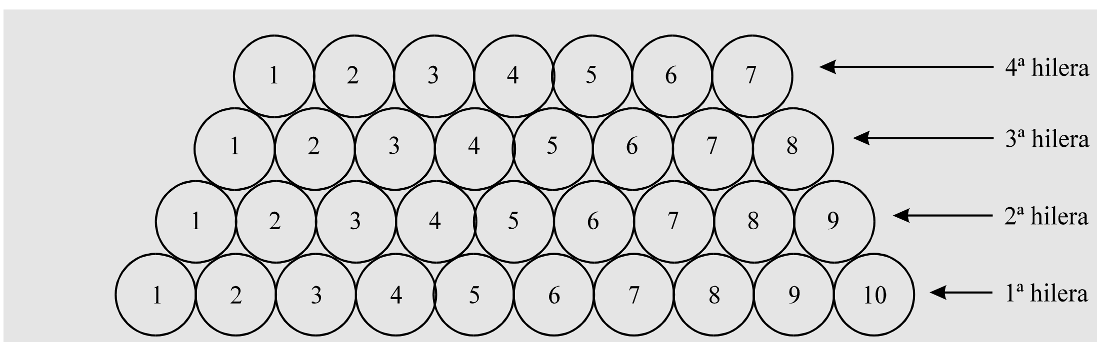
5) Un saco que contiene 100 libras de grano tiene un pequeño orificio en el fondo que cada vez se hace más grande. El primer minuto sale 1/3 de onza y de allí en adelante, en cada minuto siguiente se sale 1/3 de onza más que durante el minuto anterior. ¿Cuántas libras de grano quedan en el saco después de una hora? Nota: Una libra tiene 16 onzas.

6) Una deuda puede ser pagada en 32 semanas pagando \$5.00 la primera semana, \$8.00 la segunda semana, \$11.00 la tercera semana, y así sucesivamente. Hallar el importe de la deuda.

7) En el primer año de negocios, un hombre ganó \$500.00 y en el último ganó \$1 900.00. Si en cada año ganó \$200.00 más que en el año anterior, ¿cuántos años tuvo el negocio?

8) Una persona deposita cada mes en el banco una cantidad igual al mes anterior más algo adicional fijo. El quinto mes depositó \$308.00 y el noveno mes \$416.00. ¿Cuánto tendrá depositado a los catorce meses?

9) Se ordenan 49 postes en forma piramidal, como lo muestra la figura de abajo, colocando 10 postes en la parte inferior (primera hilera) y en los huecos la siguiente hilera (uno menos). ¿De cuántos postes se compone la hilera de arriba?



10) Se ordenan 195 postes en forma piramidal, como lo muestra la figura anterior. Si la 5ª hilera (contando de arriba hacia abajo) tiene 13 postes y la 10ª hilera tiene 18, ¿Cuántas hileras hay?

11) Las pérdidas en cinco años de una casa de comercio están en progresión aritmética. El último año perdió \$3000.00 y la pérdida de cada año fue de \$300.00 menos que el año anterior. ¿Cuánto perdió el primer año?

12) Las ganancias en tres años de un almacén están en p.a. Si el primer año ganó \$12 500.00 y el tercer año ganó \$20 500.00, ¿Cuál fue la ganancia del 2º año?

12.5.2 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una *progresión Geométrica* (p.g.) es aquella en la que cada término, después del primero, se forma multiplicando una cantidad fija al término precedente. A dicha cantidad fija se le llama *razón* .

Ejemplos de *progresiones geométricas* son los siguientes:

* $5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160 + ...$ (razón: $+ 2$)
* $24 + 12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{9} + ...$ (razón: $\frac{1}{2}$)

12.5.2.1 FÓRMULAS

En las progresiones geométricas, igual que en las aritméticas, existen cinco variables: el primer término, el último término, el número de términos, la razón y la suma de todos esos términos. Conocidas tres de ellas se pueden calcular las otras dos con la utilización de una de las tres fórmulas que se deducirán a continuación:

Sean: a = primer término de la p.g.
ℓ = último término de la p.g.
n = número de términos
r = razón de la p. g.
s = suma de los n términos.

Entonces, el primer término es a
el segundo término es ar
el tercer término es $(ar)r = ar^2$
el cuarto término es $(ar^2)r = ar^3$
el quinto término es $(ar^3)r = ar^4$

y así sucesivamente.

De manera que, considerando que se tienen n términos, el último término es

$$\boxed{\ell = ar^{n-1}} \qquad (5)$$

La suma de los n términos viene dada por la fórmula

$$\boxed{s = \frac{a - ar^n}{1 - r}} \qquad \text{para } r \neq 1 \qquad (6)$$

o bien

$$s = \frac{a - r\ell}{1 - r} \qquad \text{para } r \neq 1 \tag{7}$$

Con esas fórmulas, conocidas tres de las cinco variables, se pueden calcular las otras dos.

Ejemplo 1: El primer término de una p.g. es 16 y el último 81. Sabiendo que consta de 5 términos, hallar la razón y la suma de esos 5 términos.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $\boldsymbol{a = 16}$; $\boldsymbol{\ell = 81}$; $\boldsymbol{n = 5}$. Para obtener la razón $\boldsymbol{r}$ se utiliza la fórmula (5):

$$\ell = ar^{n-1}$$

sustituyendo:

$$81 = 16\, r^{(5-1)}$$
$$81 = 16\, r^4$$
$$\frac{81}{16} = r^4$$
$$r = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$
$$r = \pm\frac{3}{2}$$

y para obtener la suma de esos cinco términos, con la fórmula

$$s = \frac{a - r\ell}{1 - r}$$

sustituyendo valores:

$$s = \frac{16 - \left(\frac{3}{2}\right)81}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$s = \frac{16 - \frac{243}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$s = \frac{-\frac{211}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$s = 211$$

COMPROBACIÓN: Los cinco términos de la p.g. son:

Primer término: **16**

segundo término: $\frac{3}{2}(16) = \mathbf{24}$

tercer término: $\frac{3}{2}(24) = \mathbf{36}$

cuarto término: $\frac{3}{2}(36) = \mathbf{54}$

quinto término: $\frac{3}{2}(54) = \mathbf{81}$

Así que la p.g. y su suma es:

$$16 + 24 + 36 + 54 + 81 = 211$$

Ejemplo 2: El último término de una p.g. es 192. y la razón $r = - 2$. Obtener el primer término sabiendo que consta de 7 términos. Calcular la suma.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $\ell = 192$; $r = - 2$; $n = 7$. Para obtener el número de términos de que consta se utiliza la fórmula:

$$\ell = ar^{n-1}$$

sustituyendo:

$$192 = a(-2)^{7-1}$$
$$192 = a(-2)^{6}$$
$$192 = 64a$$
$$a = \frac{192}{64}$$
$$a = 3$$

La suma se obtiene utilizando la fórmula

$$s = \frac{a - r\ell}{1 - r}$$

sustituyendo valores:

$$s = \frac{3 - (-2)(192)}{1 - (-2)}$$

$$s = \frac{3 + 384}{3}$$

$$s = 129$$

COMPROBACIÓN: El primer término es $= \mathbf{3}$
el segundo término es $3(-2) = \mathbf{-6}$
el tercer término es $-6(-2) = \mathbf{12}$
el cuarto término es $12(-2) = \mathbf{-24}$
el quinto término es $-24(-2) = \mathbf{48}$
el sexto término es $48(-2) = \mathbf{-96}$
el séptimo término es $-96(-2) = \mathbf{192}$

así que la p.g. completa referida es:

$$3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 = 129$$

Ejemplo 3: El primer término de una progresión geométrica es 7, el último término es 0.000 000 7 y la razón es $r = 0.1$; obtener la suma de esos términos y determinar de cuántos términos consta.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $a = 7$; $\ell = 0.000\,000\,7$; $r = 0.1$. Para obtener la suma utiliza la fórmula:

$$s = \frac{a - r\ell}{1 - r}$$

sustituyendo:

$$s = \frac{7 - 0.1(0.000\,000\,7)}{1 - 0.1}$$

$$s = 7.7777777$$

Para calcular el número de términos debe emplearse la fórmula

$$\ell = ar^{n-1}$$

o bien

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

En cualquiera de los dos casos la incógnita es n que aparece como exponente. Para despejarla después de hacer sustituciones es necesario utilizar logaritmos. En caso necesario, en el apéndice se encuentra un repaso de logaritmos.

Utilizando la primera de estas fórmulas:

$$\ell = ar^{n-1}$$
$$0.000\,000\,7 = 7\,(0.1)^{n-1}$$

$$\frac{0.000\,000\,7}{7} = 0.1^{n-1}$$

$$0.000\,000\,1 = 0.1^{n-1}$$

Por la ley de las igualdades, aplicando logaritmos en ambos lados se obtiene:

$$\log 0.000\,000\,1 = \log 0.1^{n-1}$$

Y por las propiedades de los logaritmos, pasando el exponente del argumento como coeficiente del logaritmo:

$$\log 0.000\,000\,1 = (n - 1) \log 0.1$$

despejando:

$$n - 1 = \frac{log\, 0.000\,000\,1}{log\, 0.1}$$

$$n - 1 = \frac{-7}{-1}$$

$$n = 8$$

Ejemplo 4: La razón en una progresión geométrica es $r = 0.2$, el primer término es 512 y la suma es $s = 639.95904$; determinar de cuántos términos consta.

Solución: En esta caso se tienen conocidos $a = 512$; $r = 0.2$ y $s = 639.95904$. Para obtener el número de términos se utiliza la fórmula:

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

sustituyendo valores:

$$639.95904 = \frac{512 - 512\left(0.2\right)^n}{1 - 0.2}$$

$$(1 - 0.2)(639.95904) = 512 - 512\ (0.2)^n$$

$$511.967232 = 512 - 512\ (0.2)^n$$

$$511.967232 - 512 = - 512\ (0.2)^n$$

$$- 0.032768 = - 512\ (0.2)^n$$

$$\frac{-0.032768}{-512} = 0.2^n$$

$$0.000\ 064 = 0.2^n$$

Por la ley de las igualdades, aplicando logaritmos en ambos lados se obtiene:

$$\log 0.000\ 064 = \log 0.2^n$$

Y por las propiedades de los logaritmos, pasando el exponente del argumento como coeficiente del logaritmo:

$$\log 0.000\ 064 = n \log 0.2$$

despejando:

$$n = \frac{log\ 0.000\,064}{log\ 0.2}$$

$$n = 6$$

Contestando la pregunta: Consta de seis términos la p.g.

EJERCICIO 17

En los siguientes problemas, calcular las dos variables que faltan¨

1)	$a = 1$;	$\ell = 17.0859375$;	$n = 8$
2)	$a = 2$;	$s = 18$;	$n = 9$
3)	$a = 3$;	$\ell = -3$;	$r = -1$
4)	$a = \frac{3}{2}$;	$r = \frac{1}{2}$;	$s = \frac{765}{256}$
5)	$a = 8000$;	$\ell = 0.008$;	$s = 8\,888.888$
6)	$\ell = 1024$;	$s = 683$;	$r = -0.5$
7)	$r = 3$;	$n = 8$;	$s = 9840$

12.5.2.2 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Como se dijo en las progresiones aritméticas, lo interesante de las progresiones está en las aplicaciones que tienen a problemas prácticos. Dado un problema, el procedimiento que debe seguirse para resolverlo es bastante sencillo pues basta identificar los datos del enunciado y asignarlos a la variable que le corresponde; dicho de otra forma, se trata de transformar los datos y la pregunta dados con palabras del problema ya sea en el primer término de una progresión geométrica, o en el último, o en la suma, o en la razón, o en el número de términos, para después aplicar la fórmula correspondiente, conforme a la pregunta. Al final, es indispensable contestar la pregunta con palabras.

A diferencia de los problemas de aplicación de las progresiones aritméticas, en las geométricas en la mayoría de los problemas, no en todos, el número de términos de que consta la progresión es uno más de lo que aparentemente son.

Por otra parte, un caso muy interesante es el que se refiere a los problemas de interés compuesto, lo cual se detallará en los ejemplos correspondientes.

Ejemplo 1: Una persona debe pagar una deuda de \$7715.61 en seis mensualidades, a condición de que cada mes pague el 10% más que la vez anterior. ¿Cuánto debe pagar la primera vez?

Solución: Se tienen los siguientes datos: $s = 7715.61$; $n = 6$ y $r = 1.1$, mientras que lo que se pregunta se trata del primer término de una p.g.

El total de la deuda es la suma de una p.g. , ya que ésta es la suma de lo que pague el primer mes, más lo que abone el segundo mes, más el pago del tercer mes, etc. Por otro lado, la razón es 1.1 ya que si debe pagar 10% más que la vez anterior esto es lo que pagó la vez anterior (100%) más ese 10% que se pide, o sea es el 110%, que convertido a factor de multiplicación dividiéndolo entre 100, resulta ese 1.1.

De manera que con la fórmula

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Sustituyendo valores:

$$7715.61 = \frac{a - a(1.1)^6}{1 - 1.1}$$

$$7715.61 = \frac{a - 1.771561a}{-0.1}$$

$$7715.61 = \frac{-0.771561a}{-0.1}$$

$$7715.61 = 7.71561a$$

$$a = 1000$$

Debe pagar \$ 1 000.00 la primera vez.

COMPROBACIÓN:	El primer pago debe ser de	\$ 1 000.00
	el segundo pago debe ser de (\$1 000.00)(1.1)	= \$ 1 100.00
	el tercer pago debe ser de (\$1 100.00)(1.1)	= \$ 1 210.00
	el cuarto pago debe ser de (\$1 210.00)(1.1)	= \$ 1 331.00
	el quinto pago debe ser de (\$1 331.00)(1.1)	= \$ 1 464.1
	el sexto pago debe ser de (\$1 464.1)(1.1)	= \$ 1 610.51
	TOTAL:	\$ 7 715.61

Ejemplo 2: Las edades de seis personas coincidirán dentro de un año a ser el doble una respecto de su inmediata menor, de manera que la suma de todas las edades será 189. ¿Cuál es la edad actual de cada una de esas seis personas?

Solución: Se deben considerar inicialmente las edades que tendrán dentro de un año, porque ese es el tiempo en que formarán la progresión geométrica. Una vez obtenidas, la respuesta a la pregunta será un año menos para cada persona.

Se tienen los siguientes datos: $s = 189$; $n = 6$ y $r = 2$, mientras que lo que se pregunta, aunque en forma implícita, es el primer término a para poder deducir las demás edades.

Así que utilizando la fórmula

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

sustituyendo valores:

$$189 = \frac{a - a(2)^6}{1-2}$$

$$189 = \frac{a - 64a}{-1}$$

$$189 = \frac{-63a}{-1}$$

$$189 = 63a$$

$$a = 3$$

Significa que la persona más chica tendrá 3 años dentro de un año y las siguientes 6, 12, 24, 48 y 96 años. Pero eso será dentro de un año. Como se piden las edades actuales, éstas son: 2, 5, 23, 47 y 95 años.

Ejemplo 3: Una persona deposita $15 000.00 en un banco que le paga el 2% de interés mensual. Si reinvierte los intereses, ¿Cuál será su capital al cabo de un año?

Solución: Obsérvese la siguiente tabla para comprobar que se trata de una progresión geométrica:

t (meses)	INTERESES	CAPITAL	que se obtiene de multiplicar
0	0	**15 000**	
1	300	15 000 + 300 = **15 300**	15000×1.02
2	306	15 300 + 306 = **15 606**	15300×1.02
3	312.12	15 606 + 312.12 = **15918.12**	15606×1.02

etcétera.

Significa que al tiempo $t = 0$, o sea al instante de depositar, se tienen en la cuenta solamente los iniciales $\$\ 15\ 000.00$; al concluir el primer mes se generan los primeros intereses que equivalen a $\$300.00$, los cuales sumados a los $\$\,15\ 000.00$ iniciales hacen que al primer mes tenga un capital de $\$15300.00$. Obsérvese que al primer mes ya se tienen dos términos de la p.g. Es decir, el número de términos siempre va a ser uno más de los meses que generan intereses.

La razón en casos de interés compuesto se obtiene haciendo

$$r = 1 + \frac{\%\text{ de intereses}}{100}$$

Con las anteriores consideraciones, se tiene una progresión geométrica con los siguientes datos: $a = 15000$; $r = 1.02$ y $n = 13$. El último término de la p.g. es el capital que tendrá al cabo de doce meses. Así que con la fórmula

$$\ell = ar^{n-1}$$

sustituyendo

$$\ell = 15000\ (\ 1.02)^{13-1}$$
$$\ell = 15000\ (\ 1.02)^{12}$$
$$\ell = 15000\ (1.2682417)$$
$$\ell = 19023.62$$

Así que tendrá un capital de \$ 19 023.62

Ejemplo 4: Una persona deposita \$1 000.00 en un banco que le paga el 3% de interés bimestral. Si reinvierte los intereses y además cada bimestre vuelve a depositar otros mil pesos, ¿Cuál será su capital al cabo de un año?

Solución: Como en el ejemplo anterior se trata de una progresión geométrica, solamente que ahora su capital será la suma de la p.g. Con los datos $a = 1\ 000$; $r = 1.03$ y $n = 7$ (son seis bimestres al año, pero en la p.g. se añade un término más por el término inicial), con la fórmula

$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$s = \frac{1000 - 1000(1.03)^7}{1 - 1.03}$$

$$s = \frac{1000 - 1000(1.22987386)}{-\ 0.03}$$

$$s = 7662.46$$

Así que su capital al cabo de un año será de \$ 7 662.46

Ejemplo 5: Un microorganismo se reproduce por mitosis dividiéndose en dos partes cada hora. ¿Cuántos habrá al cabo de un día?

Solución: Con los datos $a = 1$; $r = 2$ y $n = 25$ (son 24 horas al día, pero el instante inicial genera otro término en la p.g.), se busca el último término con la fórmula

$$\ell = ar^{n-1}$$

sustituyendo:

$$\ell = 1\,(2)^{25-1}$$
$$\ell = 16\,777\,216$$

Habrá 16 777 216 microorganismos.

Ejemplo 6: Un insecto es capaz de reproducirse una sola vez en su vida, teniendo exactamente dos crías; a su vez, las crías también pueden reproducirse únicamente una vez en su vida teniendo dos crías, y así sucesivamente. Si se reproducen cada semana, ¿Cuántos insectos habrá al cabo de diez semanas, suponiendo que ninguno hubiera muerto?

Solución: Con los datos $a = 1$; $r = 2$ y $n = 11$ (son 10 semanas de reproducción, pero el instante inicial genera otro término en la p.g.), se busca la suma con la fórmula

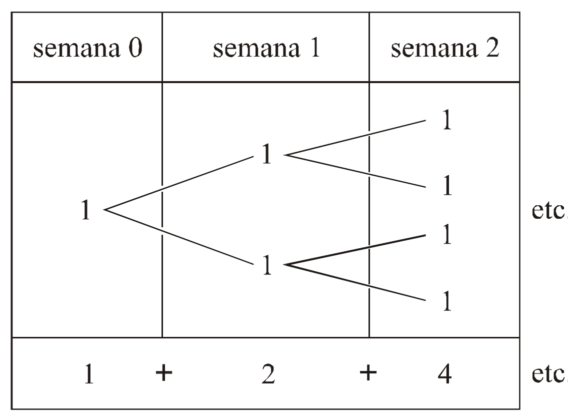
$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$s = \frac{1 - 1(2)^{11}}{1 - 2}$$

$$s = \frac{1 - 2048}{-1}$$

$$s = 2047$$

Habrá, pues, 2047 insectos.



Obsérvese que en la semana 2 ya se han generado tres términos de la p.g.

figura 12.3

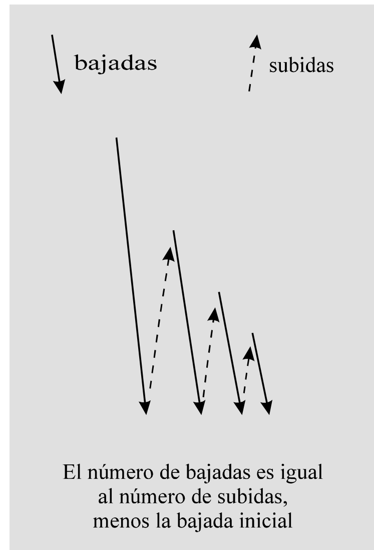
Ejemplo 7: Una pelota se suelta desde una altura de 5.0625 metros y cada vez que llega al suelo rebota a 2/3 de la altura de la que descendió. Cuando lleva recorridos 21.3125 metros en el aire, ¿cuántas veces ha tocado el piso?

Solución: Obsérvese que el número de bajadas es igual al número de subidas, menos la bajada inicial. O sea, que la distancia que lleva recorrida $d = 21.3125$ metros es la suma correspondiente al doble de todas las bajadas. En otras palabras, si a la suma de distancias recorridas dadas $d = 21.3125$ se le suma la subida que no efectuó de 5.0625 y el resultado se divide entre dos, se obtiene la suma de las distancias recorridas de bajada (o de subida). Esto es

$$d_{\text{bajada}} = \frac{21.3125 + 5.0625}{2}$$

$$d_{\text{bajada}} = 13.1875$$

Con los datos $a = 5.0625$; $s = 13.1875$ y $r = 2 / 3$ se puede obtener n con la fórmula



$$s = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$13.1875 = \frac{5.0625 - 5.0625\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$13.1875 = \frac{5.0625 - 5.0625\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$$

$$13.1875 = 3\left[5.0625 - 5.0625\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$\frac{13.1875}{3} = 5.0625 - 5.0625\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$4.3958\overline{3} = 5.0625 - 5.0625\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$-0.6\overline{6} = -\,5.0625\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{-0.6\overline{6}}{-5.0625} = \left(0.6\overline{6}\right)^n$$

$$0.131687242 = 0.6666666^n$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad:

$$\log 0.131687242 = \log 0.6666666^n$$

y por las propiedades de los logaritmos, se obtiene que

$$\log 0.131687242 = n \log 0.6666666$$

$$n = \frac{log\, 0.131687242}{log\, 0.6\overline{6}}$$

$$n = 5$$

Así que en ese instante estará tocando el piso por quinta vez.

EJERCICIO 18

1) Una persona deposita \$1 000.00 el día primero de Enero y mil más el día primero de cada mes. Sabiendo que el banco le paga un interés mensual del 4%, ¿cuál será su capital para el día último de diciembre, si reinvierte los intereses? Nota: debe considerarse el interés del mes de diciembre también.

2) Una población de animales de la misma especie, inicialmente un macho y una hembra, se reproducen de manera que cada dos meses duplican la población. ¿Cuántos animales habrá al cabo de un año?

3) Se suelta una pelota desde una altura de 6.561 metros de altura y ésta al rebotar sube 2/3 de la altura que descendió. ¿Cuántos metros llevará recorridos cuando llegue al piso por cuarta ocasión?

4) Si al final de cada año el valor de un vehículo es 2/3 de su valor al principio del año, encuentre el valor de un automóvil de \$33 000.00 al final de cuatro años.

5) La población de una ciudad es de 300 000 habitantes. Considerando que cada 5 años la población aumenta 50% de lo que era al principio de esos 5 años, encontrar la población al final de 20 años. NOTA: Se debe entender por "población" al número total de personas que existan al momento, eliminando ya los fallecidos y agregando a los nacidos.

6) Un recipiente de 10 litros es llenado con agua. Se retira un litro de agua y es reemplazado con alcohol. Ahora se retira un litro de la mezcla anterior y se vuelve a reemplazar con alcohol. Este proceso continúa hasta que se han hecho 5 reemplazamientos. ¿cuál es el porcentaje de alcohol en la Solución del recipiente al final de la última operación?

7) Un hombre que ahorra cada año lo 2/3 de lo que ahorró el año anterior, ahorró el quinto año la cantidad de \$160.00. ¿Cuánto ha ahorrado en los 5 años?

8) Se compró un terreno en abonos a pagar del siguiente modo: \$1.00 el primer año; \$3.00 el segundo año; \$9.00 el tercer año, y así sucesivamente. ¿Cuánto costó el terreno si se debe pagar en quince años?

9) ¿Qué cantidad se debe invertir al 12% de interés compuesto anual para que después de 3 años se tengan mil pesos?