TEMA 1

PERMUTACIONES

DEFINICIÓN: *Dados **n** elementos, el número de maneras en que se pueden ordenar dichos elementos se llaman permutaciones.*[1]

Por ejemplo, sea el conjunto $\{a, b, c, d\}$ de cuatro elementos. Las posibles formas en que se pueden ordenar esos cuatro elementos son:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adab	bdac	cdab	dcab
adba	bdca	cdba	dcba

es decir, en total hay 24 formas diferentes de ordenarlos. Se dice entonces que existen 24 permutaciones posibles.

En el estudio matemático de las permutaciones, lo que interesa saber es **cuántas** son, no cuáles son. A pesar de eso, en el ejemplo anterior, se enlistaron cuáles son para clarificar la idea de lo que significa permutaciones.

FACTORIAL: *El producto de un número entero positivo **n** por todos los que le anteceden, se llama factorial del número **n**. Su símbolo es* **n!**

Por ejemplo, el factorial de 5, escrito 5!, es el producto de 5 por todos los números enteros positivos que le anteceden, o sea

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

[1] La palabra **"permutar"** significa, en el idioma Español, **cambiar el orden o disposición de alguna cosa**. También significa **"cambiar una cosa por otra"**, siempre y cuando una de esas cosas no sea dinero.

PERMUTACIONES SIN REPETICIONES

Existen dos tipos de permutaciones: Sin repeticiones y con repeticiones. Se refiere al hecho de que en el conjunto de objetos que se van a permutar haya o no cosas repetidas. Aquí se comenzará con el caso más sencillo que es cuando todos los objetos son diferentes, o sea sin repeticiones.

CUANTIFICACIÓN

Para obtener cuántas son las permutaciones de n elementos, se deben realizar los siguientes pasos:

1.- A cada lugar que va a ser ocupado por un elemento se le asigna una equis o una cruz.

2.- Se analiza cuántos elementos pueden ocupar cada uno de los lugares, comenzando por aquellos sitios que están condicionados por el enunciado.

3.- Se coloca abajo de la cruz o de la equis correspondiente el número de maneras que puede ser ocupado cada lugar.

4.- Se coloca alguna letra arriba de la cruz correspondiente para especificar el (los) elemento(s) exclusivo(s) que deberá(n) ocupar ese sitio, conforme a las condiciones del enunciado.

5.- El producto de todos los números situados abajo de las cruces es el número total de permutaciones buscado.

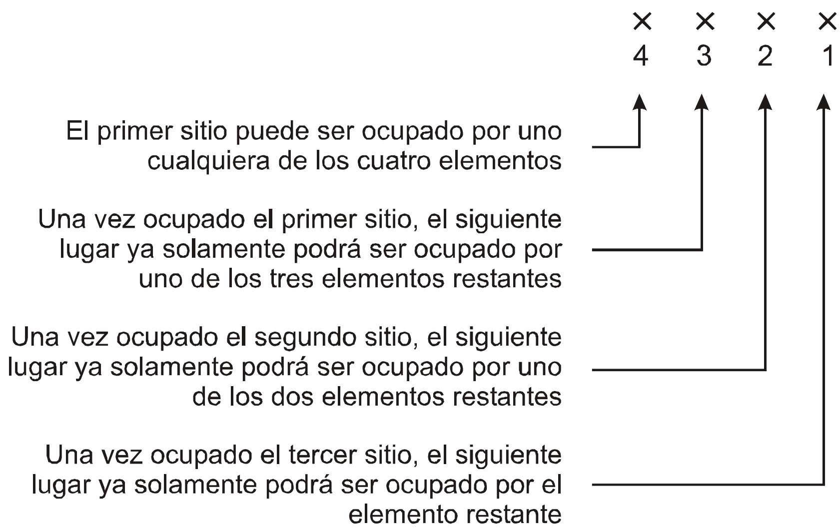
6.- En caso de que la situación se repita k veces, se encierra en un paréntesis todo lo anterior y afuera se coloca el número k para indicar la multiplicación respectiva.

Ejemplo 1: ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los elementos $\{a, b, c, d\}$?

Solución: Primero obsérvese que todos los elementos son diferentes, por lo tanto se trata de un caso de permutaciones sin repeticiones. Como son 4 elementos, hay cuatro lugares que van a ser ocupados por cada uno de ellos. Se ponen cuatro cruces o equis, de la siguiente manera:

$$\times \quad \times \quad \times \quad \times$$

El primer sitio de la izquierda puede ser ocupado por cualquiera de los cuatro elementos; una vez ocupado ese primer sitio por cualquiera de los cuatro elementos, el siguiente lugar ya solamente podrá ser ocupado por uno de los tres elementos restantes; una vez ocupado ese segundo sitio por cualquiera de los tres elementos que quedaban, el siguiente lugar ya solamente podrá ser ocupado por uno de los dos elementos restantes; finalmente, una vez ocupado ese tercer sitio por cualquiera de los dos elementos que quedaban, el último lugar podrá ser ocupado por el elemento restante:



El producto de esos cuatro números es el número de permutaciones posibles con esos cuatro elementos, o sea

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ejemplo 2: ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila de cinco sillas, Alberto, Benito, Carlos, Dora y Elena,

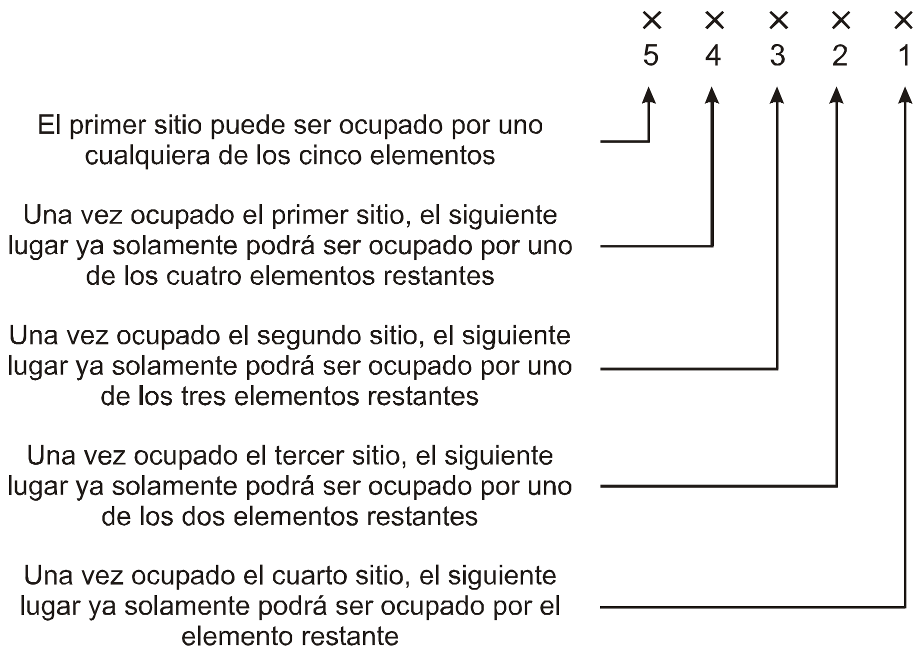
a) en total;
b) si Alberto no puede ir en ninguno de los dos extremos de la fila;
c) si Benito debe ir al principio de la fila;
d) si Dora y Elena deben ir juntas?

Solución: Sean A = Alberto
B = Benito
C = Carlos
D = Dora
E = Elena

a) En total: Hay cinco lugares que van a ser ocupados por cinco personas. A esos lugares se les asigna una cruz, de la siguiente manera:

$$\times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times$$

La primera silla de la izquierda puede ser ocupado por cualquiera de las cinco personas; una vez ocupado ese primer sitio por cualquiera de las cinco personas, el siguiente lugar ya solamente podrá ser ocupado por una de los cuatro restantes; y así sucesivamente, quedando:



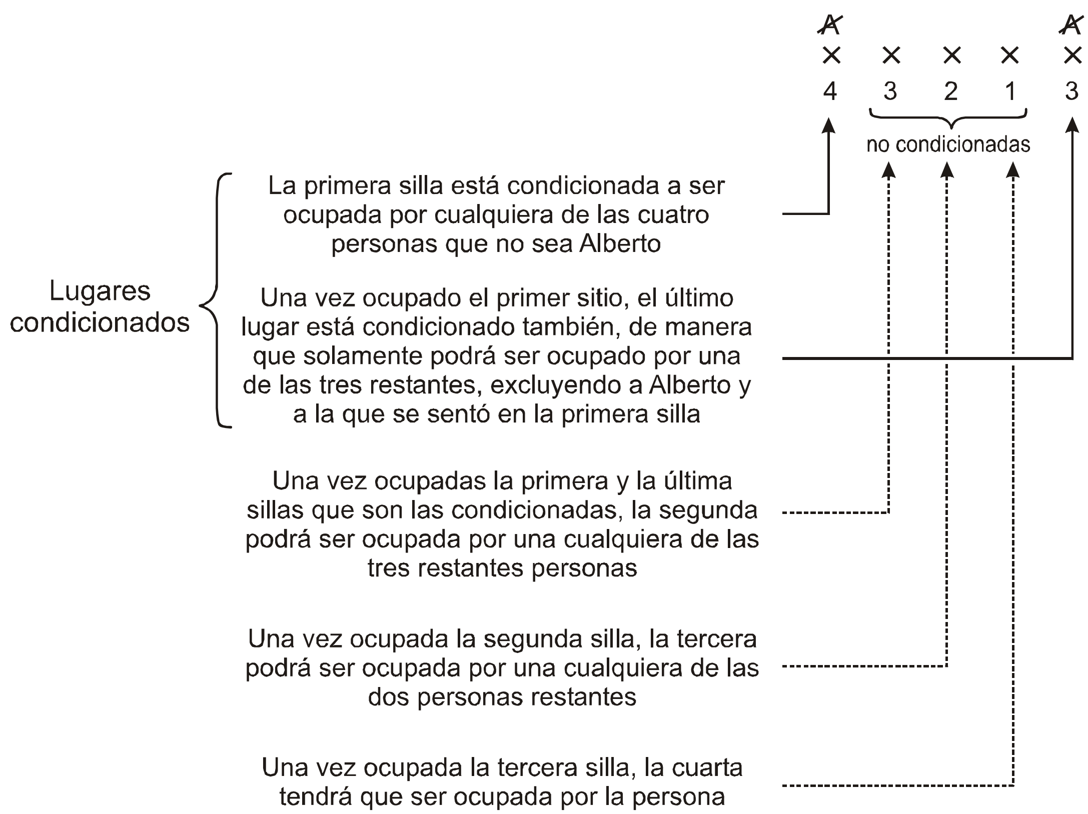
El producto de esos números es el número de formas que en total se pueden sentar las cinco personas en la hilera de cinco sillas, o sea

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

b) Hay cinco lugares que van a ser ocupados por cinco personas. A esos lugares se les asigna una cruz, de la siguiente manera:

$$\times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times$$

La primera silla de la izquierda está condicionada a ser ocupado por una cualquiera de las cuatro personas que no sea Alberto, de manera que abajo de esa cruz se pone un 4 y arriba de ella el símbolo más breve posible que indique que allí no va Alberto, por ejemplo una A tachada (ver diagrama en la siguiente página); una vez ocupado ese primer sitio por cualquiera de las cuatro personas permitidas, el último lugar también está condicionado, de manera que solamente podrá ser ocupado por una de las tres personas restantes (excluyendo a Alberto y a la persona que se sentó en la primera silla); una vez ocupadas la primera y la última silla que son las condicionadas, la segunda podrá ser ocupada por una cualquiera de las restantes 3 personas, y así sucesivamente, quedando:



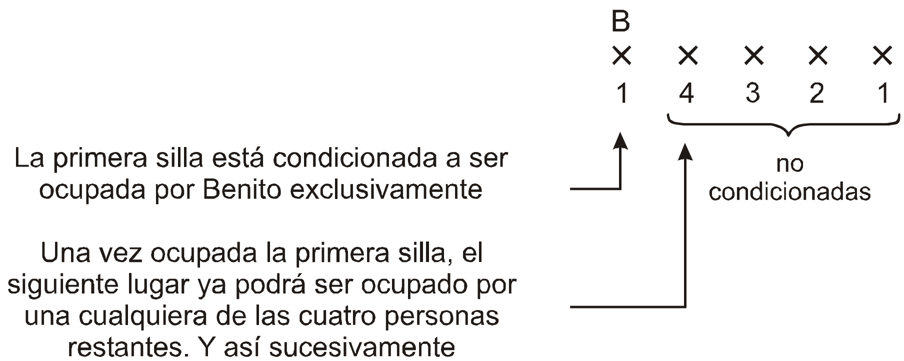
El producto de esos números es el número de formas que en total se pueden sentar las cinco personas en la hilera de cinco sillas, o sea

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 72$$

c) Hay cinco lugares que van a ser ocupados por cinco personas. A esos lugares se les asigna una cruz, de la siguiente manera:

$$\times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times$$

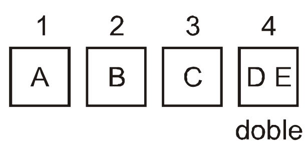
La primera silla de la izquierda solamente podrá ser ocupada Benito, de manera que abajo de esa cruz se pone un 1 y arriba de ella el símbolo más escueto que señale que ese sitio es ocupado por Benito. Una vez ocupado ese primer sitio por Benito, el siguiente lugar ya podrá ser ocupado por una de las cuatro restantes; una vez ocupadas la primera y la segunda silla, la tercera podrá ser ocupada por una cualquiera de las restantes 3 personas, y así sucesivamente, quedando:



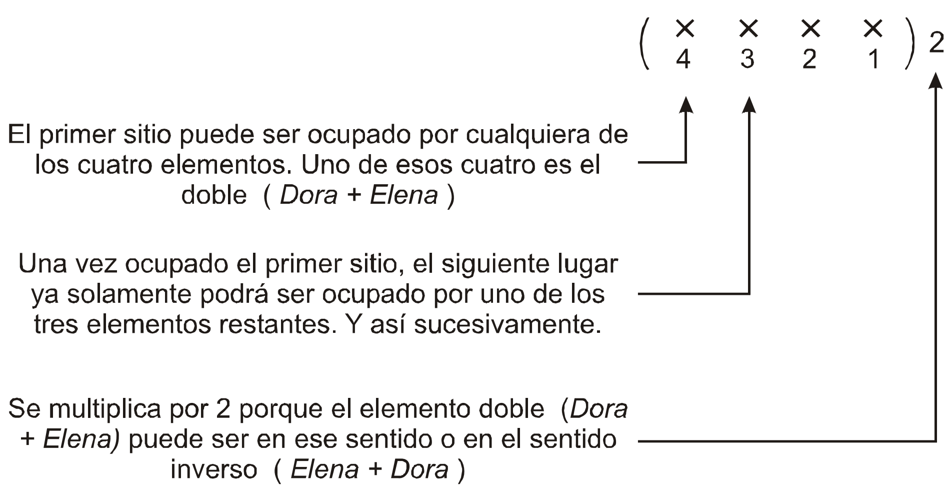
El producto de esos números es el número de formas que en total se pueden sentar las cinco personas en la hilera de cinco sillas con Benito al principio, o sea

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

d) si Dora y Elena deben ir juntas se toman como si fueran "un sólo elemento" para garantizar que nunca van a quedar separadas; de manera que hay cuatro lugares que deberán ser ocupados por cuatro personas (una de esas cuatro personas es la doble *Dora* + *Elena*).



Marcando con una cruz cada lugar, se obtiene



En total son $(4 \times 3 \times 2 \times 1)\, 2 = 48$ formas.

Ejemplo 3: ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras **ALERO**,

a) en total;
b) que comiencen con vocal;
c) que comiencen con la letra **A**;
d) que comiencen con vocal y terminen con consonante;
e) que vayan alternadas vocales con consonantes;
f) que lleven juntas las letras **LE**;
g) que lleven la sílaba **RO**;
h) que lleven dos vocales juntas;
i) que lleven las dos consonantes juntas;
j) que lleven las tres vocales juntas;
k) que no comiencen ni terminen con **L**;
l) que la **A** vaya después de la **R**, aunque no sea inmediatamente?

Solución: Sean **V** = vocal
C = consonante

a) En total: Hay cinco lugares que van a ser ocupados por las cinco letras. El primer sitio puede ser ocupado por cualquiera de las 5 letras; el segundo lugar por las cuatro restantes, y así sucesivamente:

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

En total son $5! = 120$ palabras.

b) De los cinco lugares disponibles el problema está condicionado a que el primer sitio debe ser ocupado por una vocal. De manera que en ese primer lugar solamente pueden ir tres letras (una de las tres vocales); una vez ocupado ese sitio, el siguiente puede ser ocupado por una cualquiera de las 4 restantes, y así sucesivamente, obteniéndose el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

En total son: $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$ palabras que comienzan con vocal.

c) De los cinco lugares disponibles el problema está condicionado a que el primer sitio debe ser ocupado solamente por la letra **A**; una vez ocupado ese sitio, el siguiente puede ser ocupado por una cualquiera de las 4 restantes, y así sucesivamente, obteniéndose el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

En total son: $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ palabras que comienzan con la **A**.

d) De los cinco lugares disponibles, el problema está condicionado a que el primer sitio debe ser ocupado por una vocal y el último por una consonante. De manera que en el primer lugar solamente pueden ir tres letras (una de las tres vocales) y en el último cualquiera de las dos consonantes;

$$\begin{array}{ccccc} V & & & & C \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

una vez ocupados esos dos sitio, los demás indistintamente pueden ser ocupados por una cualquiera de las tres restantes, luego las dos y así sucesivamente, obteniéndose el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & & & & C \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

Son: $3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 36$ palabras que comienzan con vocal y terminan con consonante.

e) Para que vayan alternadas las vocales con las consonantes, debe ir primero una vocal, luego una consonantes y así sucesivamente. De manera que el primer sitio solamente puede ser ocupado por una de las tres vocales; una vez puesta una de las tres vocales en ese primer sitio, el tercer lugar podrá ser ocupado por una de las dos vocales restantes y finalmente el último lugar por la vocal que queda:

$$\begin{array}{ccccc} V & & V & & V \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & & 2 & & 1 \end{array}$$

el segundo sitio podrá ser ocupado por una de las dos consonantes y el cuarto por la que haya quedado, así que el diagrama correspondiente es:

$$\begin{array}{ccccc} V & C & V & C & V \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

en total son: $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$ palabras alternadas las vocales con las consonantes.

f) Cuando se dice que dos letras o elementos deben ir juntos debe entenderse que puede ser en dos sentidos al no especificarse cuál va primero.

Las letras **L** y **E** pueden ir juntas en los dos sentidos **LE** o como **EL**. Como es lo mismo uno y otro caso, se calcula uno de ellos y se multiplica por 2. Considerando cuando van juntas en el sentido **LE**, se toman como si fueran un solo elemento, de manera que quedan teóricamente 4 elementos, como lo muestra la figura 1, que deberán ocupar 4 lugares:

1	2	3	4
A	L E	R	O

figura 1

$$\left(\begin{matrix}\times & \times & \times & \times \\ 4 & 3 & 2 & 1\end{matrix}\right)2$$

Se multiplica por 2 porque el elemento doble **LE** puede ser en ese sentido o en el inverso **EL**

que dan un total de $4! \times 2 = 48$ palabras.

g) Cuando se dice que lleve una sílaba determinada, debe entenderse que solamente puede ser en el sentido en el que existe la sílaba, no a la inversa.

Que lleven la sílaba **RO** significa que deben ir juntas esas dos letras rigurosamente en ese sentido nada más, no en el inverso (OR). Tomándolas como si fueran un sólo elemento quedan realmente 4 elementos que deberán ocupar 4 lugares:

1	2	3	4
A	L	E	R O

figura 2

$$\begin{matrix}\times & \times & \times & \times \\ 4 & 3 & 2 & 1\end{matrix}$$

que dan un total de $4! = 24$ palabras.

h) Cuando se dice que *"lleven dos vocales juntas"* debe entenderse que tienen que ser exactamente dos vocales juntas, ni una más ni una menos. En todo caso, para que se pudieran admitir dos, tres o más vocales juntas, el enunciado debe decir *"por lo menos dos vocales juntas"*.

Para garantizar que no se junten tres vocales, a cada lado del conjunto **VV** debe colocarse una consonante, considerando las cuatro posibilidades, que son:

$$\underbrace{\underset{3}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{v}{\times}}}_{\substack{\text{Primera opción:}\\ \text{Las dos vocales}\\ \text{pueden ir al}\\ \text{principio.}}}\ \underset{2}{\overset{c}{\times}}\ \underset{2}{\times}\ \underset{1}{\times}
\;+\;
\underset{2}{\overset{c}{\times}}\ \underbrace{\underset{3}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{v}{\times}}}_{\substack{\text{Segunda opción:}\\ \text{Las dos vocales}\\ \text{pueden ocupar}\\ \text{estos lugares.}}}\ \underset{1}{\overset{c}{\times}}\ \underset{1}{\times}
\;+\;
\underset{1}{\times}\ \underset{2}{\overset{c}{\times}}\ \underbrace{\underset{3}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{v}{\times}}}_{\substack{\text{Tercera opción:}\\ \text{Las dos vocales}\\ \text{pueden ocupar}\\ \text{estos lugares.}}}\ \underset{1}{\overset{c}{\times}}
\;+\;
\underset{2}{\times}\ \underset{1}{\times}\ \underset{2}{\overset{c}{\times}}\ \underbrace{\underset{3}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{v}{\times}}}_{\substack{\text{Cuarta opción:}\\ \text{Las dos vocales}\\ \text{pueden ir al final.}}}$$

que dan un total de

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \;+\; 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \;+\; 1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \;+\; 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2$$

$$= 72 \text{ palabras.}$$

OTRA FORMA:

Obsérvese que en las cuatro posibilidades descritas anteriormente, existe una simetría, ya que la primera con la última son simétricas, lo mismo la segunda con la tercera. De manera que puede calcularse tomando los dos primeros casos y multiplicando por dos, de la siguiente forma:

$$\left(\underset{3}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{c}{\times}}\ \underset{2}{\times}\ \underset{1}{\times} \;+\; \underset{2}{\overset{c}{\times}}\ \underset{3}{\overset{v}{\times}}\ \underset{2}{\overset{v}{\times}}\ \underset{1}{\overset{c}{\times}}\ \underset{1}{\times}\right)\underbrace{2}_{\substack{\text{Se multiplica por 2 por}\\ \text{los casos simétricos.}}}$$

que dan un total de

$$(3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \;+\; 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1)\, 2 = 72 \text{ palabras.}$$

i) Se toman las dos consonantes como si fueran un sólo elemento para garantizar que vayan juntas, de manera que realmente quedan cuatro lugares que deberán ser ocupados por cuatro elementos.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{A} & \boxed{LR} & \boxed{E} & \boxed{O} \end{array}$$

Todo se multiplica por dos, ya que las consonantes pueden ir juntas en el sentido LR o en el contrario RL, lo que da un total de $4! \times 2 = 48$ palabras.

$$\left(\begin{array}{cccc} \times & \times & \times & \times \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) 2$$

j) Se consideran las posiciones en que pueden ir juntas las tres vocales:

$$\begin{array}{ccccc} v & v & v & & \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \underbrace{3 \;\; 2 \;\; 1} & & & 2 & 1 \end{array} \; + \; \begin{array}{ccccc} & v & v & v & \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 2 & \underbrace{3 \;\; 2 \;\; 1} & & & 1 \end{array} \; + \; \begin{array}{ccccc} & & v & v & v \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 2 & 1 & \underbrace{3 \;\; 2 \;\; 1} & & \end{array}$$

Primera opción: Las tres vocales pueden ir al principio.

Segunda opción: Las tres vocales pueden ocupar estos lugares.

Tercera opción: Las tres vocales pueden estar al final.

que dan un total de

$$3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \; + \; 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \; + \; 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 36 \text{ palabras.}$$

OTRA FORMA:

Para garantizar que lleven las tres vocales juntas, se toman como si fueran un solo elemento, de manera que realmente quedan tres lugares que deberán ser ocupados por tres elementos, o sea $3!$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{AEO} & \boxed{L} & \boxed{R} \end{array}$$

Como a su vez esas tres vocales pueden permutarse de $3!$ maneras entre sí (AEO, AOE, EAO, EOA, OAE y OEA), todo se multiplica por 3!, lo que da un total de $3! \times 3! = 36$ palabras.

$$\left(\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right) 6$$

k) Para que no comiencen ni terminen con L, el primer sitio debe ser ocupado por una cualquiera de las otras cuatro letras (la A, E, R, O); una vez ocupado este lugar, el último sitio podrá ser ocupado por una de las tres restantes. Cumplida ya la condición exigida, el segundo lugar puede ser ocupado por una de las tres restantes (ya incluida la L), y así sucesivamente:

$$\begin{array}{ccccc} \cancel{L} & & & & \cancel{L} \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

que dan en total $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 72$ palabras.

l) Debe entenderse que la A va después de la R aún cuando no sea inmediatamente, como por ejemplo en la palabra O***R***EL***A***. Conviene entonces analizar separadamente los casos posibles y luego sumarlos.

* **Cuando la *R* va al principio:** necesariamente la A quedará después. De manera que el segundo lugar podrá ser ocupado por una cualquiera de las cuatro letras que no sea la R; una vez ocupado, el siguiente podrá ser ocupado por cualquiera de las tres restantes, y así sucesivamente:

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{R} & & & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & = 24 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

* **Cuando la *R* va en el segundo sitio:** el primer lugar solamente podrá ser ocupado por una de las tres letras que no sean ni la R ni la A; una vez ocupado, el tercer lugar ya solamente podrá ser ocupado por una de las tres restantes (incluida ahora la A), y así sucesivamente:

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{\mathrm{A}} & \mathrm{R} & & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & = 18 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

* **Cuando la *R* va en el tercer lugar:** el primer sitio solamente podrá ser ocupado por una de las tres letras que no sean ni la R ni la A; una vez ocupado, el segundo lugar ya solamente podrá ser ocupado por una de las dos restantes; el cuarto sitio podrá ser ocupado por una de las dos restantes, incluida ahora la A, y así sucesivamente:

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{\mathrm{A}} & \cancel{\mathrm{A}} & \mathrm{R} & & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & = 12 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & \end{array}$$

* **Cuando la *R* va en el cuarto lugar:** la A necesariamente deberá ir en el quinto para que vaya después de la R. Los demás sitios podrán ser ocupados por las tres que quedan, luego dos y finalmente una:

$$\begin{array}{cccccc} & & & \mathrm{R} & \mathrm{A} & \\ \times & \times & \times & \times & \times & = 6 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Finalmente, sumando cada caso se obtiene el total de palabras pedidas. Son

$$24 + 18 + 12 + 6 = 60$$

Ejemplo 4: ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en seis sillas colocadas en círculo?

Solución: Como el círculo es una curva cerrada, debe tomarse a una de las personas como punto de referencia inicial. Sea A esa persona. A partir de ella se puede sentar una cualquiera de las cinco que restan, luego cuatro, y así sucesivamente, de la forma en que se muestra en la figura 3:

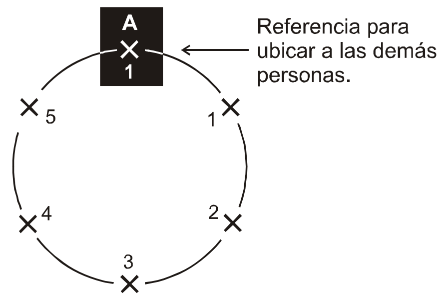


figura 3

De manera que el número total de formas que se pueden acomodar las seis personas en círculo son

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Es frecuente que el estudiante en un principio no esté de acuerdo, pues se le viene a la mente que hay "otras formas" de colocar a las personas no estando necesariamente la persona A en el sitio asignado en la figura 3. Por ejemplo, se le ocurre que si se sitúa a la persona A como se muestra en las figuras 5 y 6, son ordenaciones diferentes entre sí y además no están contempladas en el cálculo hecho cuando se colocó a la persona A en el lugar específico de la figura 3. Sin embargo, las tres colocaciones, la de la figura 4, la de la figura 5 y la de la figura 6, son la misma.

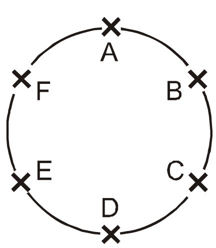


figura 4

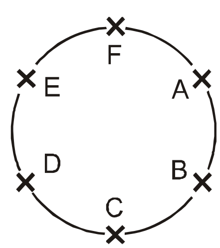


figura 5

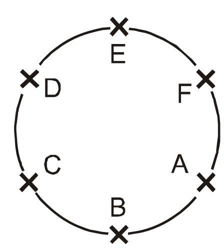


figura 6

El detalle está en que la colocación de las personas debe considerarse de unas respecto de las otras, no respecto del sitio del piso que ocupan. En las figuras 4, 5 y 6 las personas están situadas en diferente forma respecto del piso, pero no unas respecto de las otras en torno a la mesa.

Puede verse que, por ejemplo, la persona A tiene a la persona B a uno de sus lados (en el sentido de las manecillas del reloj) y a la persona F al otro lado (en el sentido contrario a las manecillas del reloj), tanto en la figura 4, como en la 5 y la 6. De la misma manera, la persona C tiene a la persona

D a uno de sus lados (en el sentido de las manecillas del reloj) y a la persona B al otro lado (en el sentido contrario a las manecillas del reloj), tanto en la figura 4, como en la 5 y la 6. Y así con cada una de las ellas.

Ejemplo 5: Tres hombres y tres mujeres se disponen a realizar un viaje en un automóvil, de los cuales hay dos matrimonios y un hombre y una mujer solteros. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar en el vehículo, tres adelante y tres atrás, si solamente los tres hombres saben manejar y los matrimonios han de ir juntos?

Solución: Sean $\mathbf{H_1}$ **,** $\mathbf{H_2}$ y $\mathbf{H_3}$ los hombres; $\mathbf{M_1}$ **,** $\mathbf{M_2}$ y $\mathbf{M_3}$ las mujeres. Además, ($\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{M_1}$) un matrimonio y ($\mathbf{H_2}$ y $\mathbf{M_2}$) el otro matrimonio, mientras que $\mathbf{S = H_3}$ y $\mathbf{M_3}$ los solteros. Sea la cruz del lado izquierdo superior la que representa el volante.

Si $\mathbf{H_1}$ o $\mathbf{H_2}$ manejan, a su lado deberá ir su mujer y el sitio de la otra ventanilla de adelante tendrá que ser ocupado por uno de los solteros; si $\mathbf{H_3}$ maneja, los dos sitios de adelante deberán ser ocupados por uno de los matrimonios. Salvo el caso de que el hombre maneje, los matrimonios podrán acomodarse juntos en cualquiera de los dos sentidos, o sea **H-M** o bien **M-H**.

a) Si $\mathbf{H_1}$ es el que maneja, el asiento del volante podrá ser ocupado por ésa sola persona, el de enmedio por su mujer y el del otro extremo por cualquiera de los dos solteros.

Para ocupar los tres asientos traseros, se consideran $\mathbf{H_2}$ y $\mathbf{M_2}$ como un sólo elemento para garantizar que vayan juntos (se multiplica por dos porque pueden ir en los dos sentidos); entonces es el equivalente a que nada más haya dos asientos atrás, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{H_1} & \mathrm{M_1} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{asientos delanteros}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \times & \times \\ 2 & 1 \end{array}\right) 2 \qquad \text{asientos traseros}$$

que dan un total de $\underbrace{1 \times 1 \times 2}_{\text{asientos delanteros}} \times \underbrace{2 \times 1 \times 2}_{\text{asientos traseros}} = 8$ formas.

b) Si $\mathbf{H_2}$ es el que maneja, se repite exactamente todo lo anterior, o sea que se obtienen otras **8** formas de ocupar los asientos.

c) Si $\mathbf{H_3}$ es el que maneja, el asiento del volante podrá ser ocupado por ésa sola persona y los otros dos por uno de los matrimonios. Se consideran como un solo elemento para garantizar que vayan juntos (se multiplica por dos porque pueden ir en los dos sentidos); entonces es el equivalente a que nada más haya dos asientos adelante.

Para ocupar los tres asientos traseros, se consideran como un solo elemento al matrimonio que no se colocó adelante para garantizar que vayan juntos (se multiplica por dos porque pueden ir en los dos sentidos); entonces es el equivalente a que nada más haya dos asientos atrás.

La disposición del automóvil queda así:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{H}_1 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} \times & \times \\ 1 & 2 \end{array}\right) 2 \end{array} \quad \text{asientos delanteros}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \times & \times \\ 2 & 1 \end{array}\right) 2 \quad \text{asientos traseros}$$

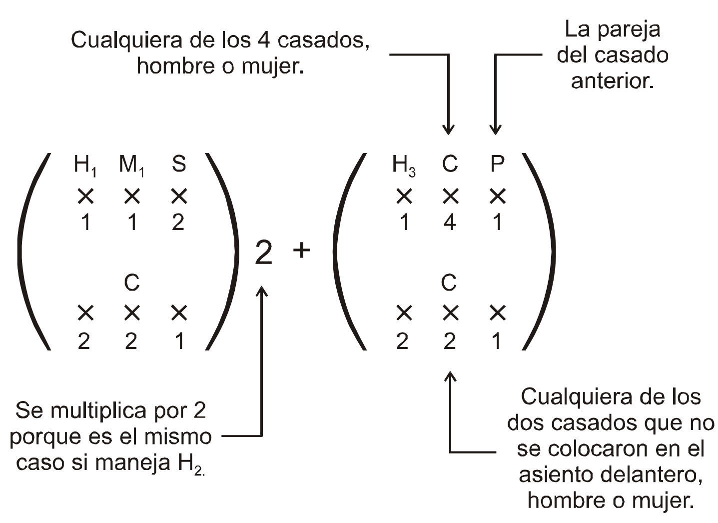
que dan $\underbrace{1 \times 2 \times 2}_{\text{asientos delanteros}} \times \underbrace{2 \times 1 \times 2}_{\text{asientos traseros}} = 16$ formas.

Así que en total son $8 + 8 + 16 = 32$ maneras.

OTRA FORMA:

Sean S = soltero
C = casado (a)
P = pareja del casado.

Considerando el caso de que maneje $\mathbf{H_1}$ (que es lo mismo que si maneja $\mathbf{H_2}$) más el caso de que maneje $\mathbf{H_3}$ (ver diagrama),



dan en total: $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 + 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 = 32$ formas.

Ejemplo 6: ¿De cuántas maneras se pueden acomodar 5 personas en una hilera de 4 sillas, si

a) la persona A no debe ir al principio;
b) A y B deben ir juntos;
c) A y B no deben ir juntos?

Solución: a) Como nada más hay 4 sillas, esto implica que una persona deba quedar siempre afuera. Tienen que considerarse las siguientes dos posibilidades:

1) **Si la persona A queda afuera:** con eso es suficiente para que no vaya al principio de la hilera. Así que las otras cuatro personas pueden acomodarse indiferentemente en las cuatro sillas:

$$\underset{4}{\times}\quad \underset{3}{\times}\quad \underset{2}{\times}\quad \underset{1}{\times} = 4! = 24$$

2) **Si la persona A queda adentro del arreglo:** Supóngase que la persona que queda afuera es la B. Para que no vaya al principio de la hilera en la primera silla la persona A deberán colocarse una cualquiera de las otras tres; después, las tres restantes incluida ya la persona A podrán acomodarse en la segunda silla, y así sucesivamente. Finalmente se multiplica por 4 porque es lo mismo que queden afuera B, C, D o E:

$$\left(\overset{\cancel{A}}{\underset{3}{\times}}\quad \underset{3}{\times}\quad \underset{2}{\times}\quad \underset{1}{\times}\right) 4$$

Se multiplica por 4 porque pueden salir del arreglo las personas B, C, D o E y todos los casos son iguales

$$3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 72$$

Así que el número de maneras en que se pueden acomodar 5 personas en una hilera de 4 sillas, sin que la persona A vaya al principio, es $24 + 72 = 96$.

OTRA FORMA:

Simplemente considerando que la persona A no debe ir en la primera silla, cualquiera de las otras cuatro pueden sentarse allí; en la segunda silla pueden colocarse las tres restantes más A, o sea 4, y así sucesivamente:

$$\underset{4}{\overset{\cancel{A}}{\times}}\quad \underset{4}{\times}\quad \underset{3}{\times}\quad \underset{2}{\times} \quad = 96$$

b) Para que A y B vayan juntos se requiere forzosamente que ambos queden adentro del arreglo, o sea, que C, D o E queden fuera. Son tres casos iguales, por lo tanto basta considerar uno de ellos y luego multiplicarlo por 3.

Considerando que sea C el que quede fuera: Para garantizar que A y B vayan juntos se toman como un solo elemento, de manera que quedan tres elementos

1	2	3
$\boxed{AB}$	$\boxed{D}$	$\boxed{E}$

El diagrama correspondiente es:

$$\left(\underset{3}{\times}\quad \underset{2}{\times}\quad \underset{1}{\times}\right)\ 3 \times 2$$

Se multiplica por 3 porque hay 3 casos iguales cuando *C*, *D* o *E* quedan afuera

Se multiplica por 2 porque pueden ir juntas en el sentido AB o en el sentido BA

que dan un total de $3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 = 36$

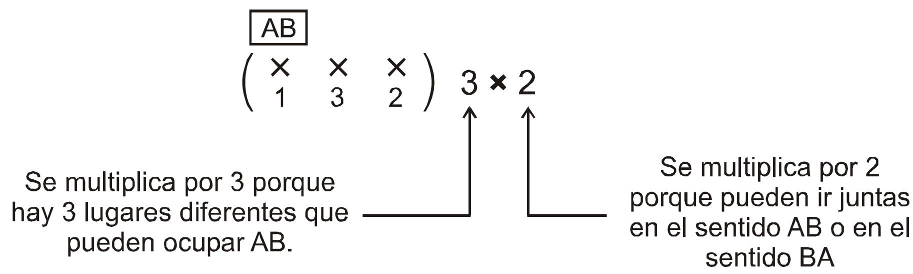
Debe tenerse mucho cuidado cuando se razona este problema de la siguiente forma: Para garantizar que A y B vayan juntos se toman como un solo elemento, de manera que quedan cuatro elementos (uno doble) como se ve en la figura de la derecha.

1	2	3	4
$\boxed{AB}$	$\boxed{C}$	$\boxed{D}$	$\boxed{E}$
doble			

Luego se colocan las tres cruces que señalan los tres sitios a ocupar (porque con el doble $\boxed{AB}$ en realidad se convierten en cuatro sillas ocupadas), pero debe asegurarse que el elemento doble $\boxed{AB}$ quede adentro del arreglo, pues de otra forma podrían quedar $\boxed{C}$, $\boxed{D}$ y $\boxed{E}$ en esos 3 lugares, con lo cual ni se cumple que $\boxed{AB}$ vayan juntos ni se cumple que sean cuatro las personas que se sientan en las sillas.

Entonces, para garantizar que el grupo $\boxed{AB}$ quede adentro del arreglo se le asigna inicialmente un lugar cualquiera, por ejemplo, el primero de la izquierda, y después de multiplica por todos los lugares que dicho grupo $\boxed{AB}$ puede ocupar.

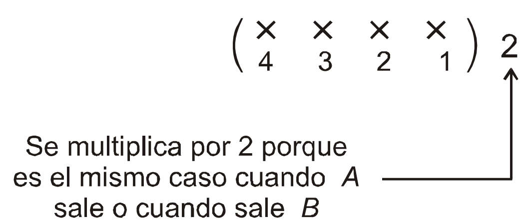
El siguiente diagrama ilustra lo anterior:



lo cual da el mismo resultado anterior.

c) Para que A y B vayan separados debe ocurrir una de las siguientes tres posibilidades: Una, que sea la persona A la que quede afuera, con lo que es suficiente para no juntarse con B; dos, que sea la persona B la que quede afuera; y tres, que ambas queden adentro del arreglo. Los dos primeros casos son iguales, de manera que basta considerar uno de ellos y multiplicarlo por dos.

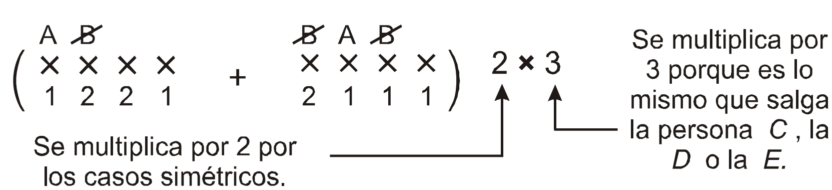
c1) **Cuando A (o B) queda fuera.** Entonces las cuatro personas restantes podrán acomodarse indistintamente en las cuatro sillas:



que dan $4! \times 2 = 48$

c2) **Cuando A y B quedan adentro del arreglo.** Este inciso puede resolverse de dos formas:

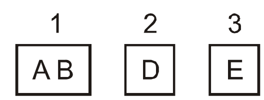
c2.1) **Primera forma:** Se consideran las cuatro posibilidades de ocupar una silla que tiene la persona A, garantizando que a su(s) lado(s) no se siente B. Obsérvese que el caso de ocupar la primera silla es simétrico con la de la última, lo mismo sucede con la segunda y la tercera. Así que es suficiente cuantificar los dos primeros casos y luego multiplicarlo por dos, como lo muestra el siguiente diagrama:



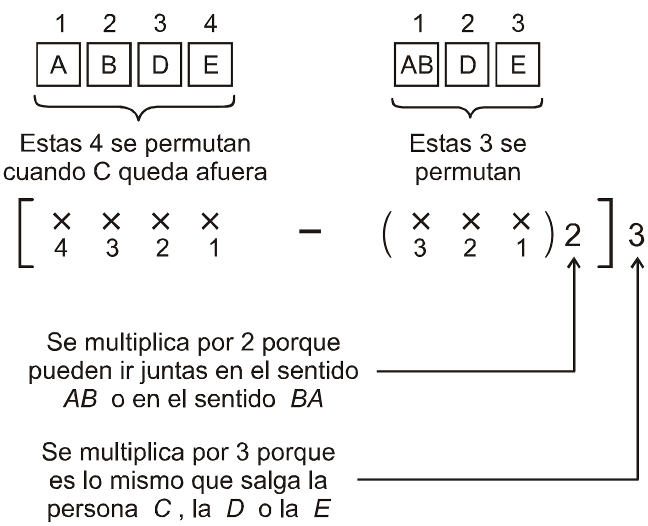
que dan $\left(1 \times 2 \times 2 \times 1 \;+\; 2 \times 1 \times 1 \times 1\right) \times 3 \times 2 \;=\; 36.$

c2.2) **Segunda forma:** Se cuantifican primeramente todas las formas de acomodarse cuatro personas, suponiendo que C queda afuera, lo que incluye cuando van juntas la persona A y la B más cuando van separadas; por lo tanto, basta restarle al conjunto universal (al "todo") los casos cuando van juntas. Esto se multiplica por 3 porque es lo mismo que cuando D o E quedan afuera.

Para la resta mencionada deben considerarse como un solo elemento a las personas A y B para garantizar que vayan juntas, por lo que son tres lugares los que se permutan:



De manera que el diagrama correspondiente es:



que dan $\left(4! - 3! \times 2\right) \times 3\; = 36.$

Así que este inciso c) es la suma de la posibilidad 1 más la posibilidad 2, o sea, la solución es:

$$48 + 36 = 84.$$

EJERCICIO 1

NOTA IMPORTANTE: En todos los problemas de permutaciones debe escribirse todo el proceso sin omitir nada, poniendo las explicaciones a cada factor u operación realizada, ya que es frecuente que con un mal razonamiento se llegue al resultado correcto por la casualidad que resulta de conmutar los factores.

1) ¿De cuántas maneras se pueden sentar siete personas en una hilera de siete sillas si dos de ellas A y B no pueden ir juntas y otras dos C y D no pueden ir separadas?

2) ¿De cuántas maneras se pueden sentar siete personas en una hilera de siete sillas si la persona A debe ir adelante de la persona B, aunque no sea inmediatamente (o sea, entre la persona A y la persona B pueden ir otras personas)?

3) ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en una hilera de seis sillas si la persona A debe ir inmediatamente adelante de la persona B y ésta última no puede ocupar la última silla?

4) ¿Cuántas palabras de seis letras se pueden formar con las letras **BALERO**,

   a) en total;
   b) que comiencen con vocal y terminen con consonante;
   c) que comiencen con la letra **A** y terminen con 2 consonantes (no 3);
   d) que comiencen con 2 vocales (no 3) y terminen con consonante;
   e) que vayan alternadas vocales con consonantes;
   f) que lleven juntas las letras **LE** por una parte y **BA** por otra, todo en la misma palabra;
   g) que comiencen con consonante y lleven la sílaba **RO**;
   h) que lleven dos vocales juntas (no 3);
   i) que lleven dos consonantes juntas (no 3), pero separadas la **A** y la **E**;
   j) que lleven las tres vocales juntas, pero la **A** no al principio de ellas;
   k) que no comiencen ni terminen con **L**;
   l) que terminen con consonante y que la **A** vaya después de la **R**?

5) ¿Cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar con las letras **BALER**,

   a) en total;
   b) que comiencen con vocal y terminen con consonante;
   c) que comiencen con la letra **A** y terminen con 2 consonantes (no 3);
   d) que vayan alternadas vocales con consonantes;
   e) que lleven juntas las letras **LE** por una parte y **BA** por otra, todo en la misma palabra;
   f) que comiencen con consonante y lleven la sílaba **RA**;
   g) que lleven dos vocales juntas;
   h) que lleven dos consonantes juntas (no 3), pero separadas la **A** y la **E**;
   i) que no comiencen ni terminen con **L**;
   j) que terminen con consonante y que la **A** vaya después de la **R**?

6) ¿De cuántas maneras se pueden acomodar tres hombres y tres mujeres en cinco sillas colocadas en círculo,

a) si la persona A y la B no pueden ir juntas;
b) si la persona A y la B deben ir juntas;
c) si deben quedar solamente dos personas del mismo sexo juntas y todas las demás alternadas hombre - mujer?

7) El Departamento de Tránsito va a hacer placas para los coches de una ciudad, de manera que deben iniciar con la letra **P** o con la **B**, después otras dos letras cualesquiera (La *CH*, la *LL* y la *RR* no se valen como si fueran una sola letra) y finalmente tres números seguidos, a excepción del **000**. ¿Cuántas placas se podrán hacer? Considerar 27 letras del alfabeto.

8) En una ciudad, los números telefónicos deben comenzar con **2, 3, 4, 5** ó **6** y deben constar de seis dígitos a condición de que el segundo dígito no sea igual al primero (por ejemplo, **22 45 08** no se vale porque el segundo dígito es igual al primero) ni tampoco que terminen en **0000**. ¿De cuántos teléfonos se puede disponer así?

9) En un librero se desean acomodar 3 libros de Matemáticas, 4 de Geografía y 2 de Historia, de manera que queden juntos entre sí los pertenecientes a la misma materia. ¿De cuántas formas se puede hacer, si

a) el libro $\mathbf{M_2}$ de Matemáticas no debe juntarse con el $\mathbf{G_3}$ de Geografía;
b) los libros $\mathbf{G_2}$ y el $\mathbf{G_3}$ de Geografía no deben separarse (en cualquier sentido);
c) el libro $\mathbf{H_1}$ de Historia debe quedar exactamente en medio?

10) Cuatro hombres y tres mujeres se disponen a realizar un viaje en un automóvil chico en el que solamente caben 2 personas en la parte delantera y tres en la de atrás. De ellos, únicamente los hombres $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$ saben manejar. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar, si en la parte delantera debe ir una pareja (un *hombre* con una *mujer* o viceversa) y en la parte posterior deben ir alternados *hombre-mujer-hombre* o bien *mujer-hombre-mujer* ?

11) En una combi caben dos personas en el asiento delantero, cuatro en el intermedio y cuatro en el posterior. 5 matrimonios van a realizar un viaje en ella, entre los cuales solamente dos hombres, $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$ saben manejar. Si las parejas no deben separarse, ¿de cuántas maneras pueden acomodarse,

a) en total;
b) si el hombre $\mathbf{H_1}$ no puede ir junto con el hombre $\mathbf{H_5}$;
c) si las mujeres $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_3}$ desean ir juntas
d) si al mismo tiempo $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_3}$ desean ir juntas y $\mathbf{H_4}$ con $\mathbf{H_5}$ también?

12) ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si:

a) cada uno de ellos puede emplearse solamente una vez;
b) cada uno de ellos puede emplearse cuando mucho dos veces, no tres;
c) uno de los dígitos debe repetirse exactamente dos veces y el otro debe ser diferente;

d) deben ser números nones formados por dígitos consecutivos, ya sea en forma ascendente o en forma descendente?

13) Cinco matrimonios compran 10 boletos para asistir a una obra de teatro. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en la misma hilera de bancas si

a) todas las mujeres han de sentarse juntas;
b) todas las mujeres han de sentarse juntas y todos los hombres también;
c) las parejas han de sentarse juntas?
d) las parejas han de sentarse juntas, yendo siempre dos mujeres juntas y luego dos hombres juntos alternadamente, salvo en los extremos?

14) ¿De cuántas maneras se pueden multiplicar cuatro números seleccionados entre seis números positivos y cinco negativos, de tal forma que el producto sea negativo?

15) ¿De cuántas maneras se pueden multiplicar tres números seleccionados entre seis números positivos y cinco negativos, de tal forma que el producto sea positivo?