

PERMUTACIONES CON REPETICIONES

Hay casos en los que los elementos están repetidos, de manera que al intercambiarlos de posición lo que se obtiene es exactamente lo mismo a lo que ya se tenía. Se trata entonces de una repetición.

Por ejemplo, si se tienen las letras **BALA**, cuando se intercambian las consonantes se obtiene la palabra **LABA**. Si ahora se intercambian las vocales, una **A** en el lugar de la otra **A**, ver la figura 7, se obtiene **LABA**, que es lo mismo que ya se tenía.

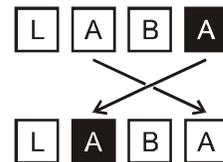


figura 7

Existen dos tipos de repeticiones: *simples* y *compuestas*. Sobre la marcha se definirán cada una. Por lo pronto debe entenderse que mientras no se diga otra cosa, se trata de repeticiones simples.

CUANTIFICACIÓN

Las repeticiones se eliminan dividiendo entre el factorial de cada clase repetida.

Si n es el número total de elementos, k_1 es la clase 1 repetida k_1 veces, k_2 es la clase 2 repetida k_2 veces, etc., el número total de permutaciones diferentes que se pueden obtener es

$$\text{número de permutaciones} = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times k_3! \dots}$$

Evidentemente, igual que en las permutaciones sin repetición, debe vigilarse al plantear la solución que se cumplan las condiciones del enunciado del problema.

Ejemplo 1: ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras **LABA** ?

Solución: En este caso, $k_1 = 2$ (A)
 $n = 4$

de manera que

$$\frac{\begin{matrix} \times & \times & \times & \times \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}}{2!} = 12$$

Ejemplo 2: ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras **CABAL**,

- a) en total;
- b) que comiencen con vocal;
- c) que lleven la sílaba **CA**;
- d) que terminen en consonante?

Solución: a) En total: no hay ninguna condición específica que cumplir, de manera que solamente hay que vigilar las posibles repeticiones cuando permuten las dos **A** :

En este caso, $k_1 = 2$ (A)
 $n = 5$

de manera que

$$\frac{\begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}}{2!} = 60$$

b) En este caso la condición que debe hacerse cumplir es que el primer sitio sea ocupado por una vocal. Puede hacerse de dos formas:

Primera forma: Considerando que hay dos vocales, el primer sitio puede ser ocupado por cualquiera de esas dos vocales; pero como ambas son la misma (la **A**), habrá una repetición:

En este caso, $k_1 = 2$ (A)

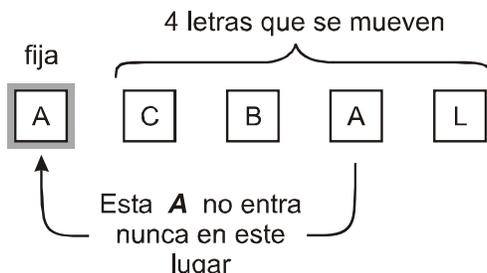
de manera que

$$\frac{\begin{matrix} A \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}}{2!} = 24$$

Lo anterior es cierto, pero equivale a "hacer para luego deshacer", cuando se ponen dos **A** en el primer sitio y luego se quitan las repeticiones con la división del **2!**. Eso se puede evitar y hacer el cálculo más simple con el razonamiento de la siguiente segunda forma.

Segunda forma: Con mayor simplicidad se puede realizar este cálculo razonando de la siguiente manera: Como las dos vocales que existen son la misma, la palabra necesariamente deberá comenzar con la **A**. Entonces, en el primer sitio se coloca en forma fija una cualquiera de las dos **A**, lo que quiere decir que esa **A** no va a intercambiar con ninguna otra letra porque va a quedarse fija allí; en el segundo lugar cualquiera de las cuatro letras que quedan (incluida la otra **A**); luego tres y así sucesivamente.

En este caso no hay ninguna repetición ya que el primer sitio fue ocupado exclusivamente por una de las **A** sin "quitarse de allí para nada", por lo que la otra **A** no podrá intercambiar con ella y, por lo tanto, no habrá repeticiones. Y la condición de que comiencen con **A** se está cumpliendo.

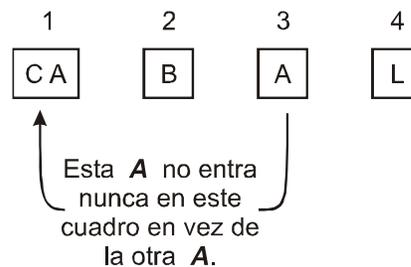


de manera que

$$\begin{array}{cccccc}
 & A & & & & \\
 \times & \times & \times & \times & \times & \\
 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & = 24
 \end{array}$$

- c) Para garantizar que la sílaba **CA** siempre exista como tal, se considera **CA** como un sólo elemento (equivale a que nada más haya cuatro letras).

Eso significa que la otra **A** podrá permutar con todo el conjunto **CA**, pero no podrá nunca intercambiar posición solamente con la **A** de la sílaba **CA**, por lo que no habrá repeticiones.



de manera que

$$\begin{array}{cccc}
 \times & \times & \times & \times \\
 4 & 3 & 2 & 1
 \end{array} = 24$$

- d) Para hacer cumplir la condición de que terminen en consonante, el último sitio solamente podrá ser ocupado por una de las tres consonantes que existen. Una vez ocupado este último sitio, el primer lugar podrá ser ocupado por una de las cuatro letras que quedaron, luego por tres y así sucesivamente. En este caso sí está contemplado que las dos **A** intercambien lugares, por lo que sí habrá repeticiones.

Se tiene que $k_1 = 2$ (A)

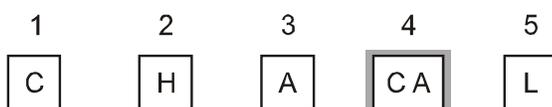
de manera que

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & \times & \\
 \times & \times & \times & \times & \times & \\
 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & \\
 \hline
 & & & & 2! & = 36
 \end{array}$$

Obsérvese que en el último sitio se colocó una **V** tachada para indicar que allí no va una vocal, ya que eso implica necesariamente que vaya una consonante. Aquí lo importante anotar es que no se colocó arriba de esa cruz una **C** que indicara que allí va una consonante ya que la letra **C** es uno de los elementos a permutar y eso provocaría confusión.

Ejemplo 3: ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras **CHACAL**, que lleven la sílaba **CA**?

Solución: Para garantizar que la sílaba **CA** siempre exista como tal, se considera **CA** como un sólo elemento (equivale a que nada más haya cinco letras). Eso significa que la otra **A** no podrá nunca intercambiar posición con la **A** de la sílaba **CA**, ni tampoco la **C** que quedó sola con la otra **C** de la sílaba.



Aparentemente con eso no habrá repeticiones ya que todos los elementos son diferentes; sin embargo, la sílaba fija **CA** puede intercambiar posiciones con la **C** y la **A** “sueltas” simultáneamente cuando éstas dos queden juntas. Uno de varios casos posibles está mostrado en la figura 8. Al final de cuentas, ambas palabras son exactamente las mismas. Se trata de una *repetición compuesta*.

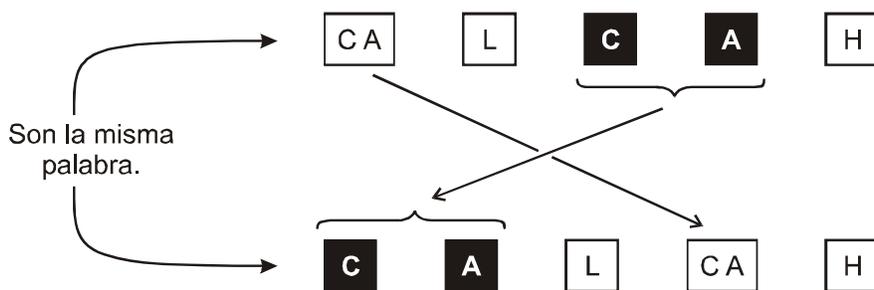


figura 8

El cálculo se puede hacer contando todas las palabras que lleven la sílaba **CA** (haciéndolos un solo elemento), lo que incluye palabras que lleven una sola vez la sílaba **CA** y las que la lleven dos veces. Luego deberán restarse las repeticiones dadas por las permutaciones entre sí de esas dos sílabas **CA** ejemplificadas en la figura 8. Para esto último es necesario considerar como un solo elemento a cada una de las sílabas **CA** para garantizar su existencia en cada palabra, lo que daría el equivalente a cuatro elementos solamente, como se muestra en el siguiente diagrama, donde

$$k_1 = 2 \quad (CA)$$

- c) que comiencen y terminen con consonante;
d) que lleven las tres consonantes juntas?
- 5) ¿Cuántas palabras de seis letras se pueden formar con las letras **TODOTO**,
- en total;
 - que comiencen con vocal y terminen con consonante;
 - que comiencen y terminen con consonante;
 - que no lleven la sílaba **OD**;
 - que lleven la sílaba **TO**?
- 6) ¿Cuántas palabras de cinco letras se pueden formar con las letras **TODOTO**,
- en total;
 - que comiencen con vocal y terminen con consonante;
 - que comiencen y terminen con consonante;
 - que no lleven la sílaba **OD**;
 - que lleven la sílaba **TO**;
 - que no comiencen con la letra **D**?
- 7) ¿Cuántas palabras de siete letras se pueden formar con las letras **TODOTOD**,
- en total;
 - que comiencen con vocal y terminen con consonante;
 - que comiencen y terminen con consonante;
 - que lleven la sílaba **TOD**;
 - que lleven en grupos todas las letras repetidas juntas entre sí (**TT**, **OOO** y **DD**);
 - que no comiencen ni terminen con la letra **D**?
- 8) ¿Cuántas palabras de seis letras se pueden formar con las letras **TODOTOD**,
- en total;
 - que comiencen con vocal y terminen con consonante;
 - que comiencen y terminen con consonante;
 - que lleven la sílaba **TOD**;
 - que lleven las dos **T** juntas entre sí y las dos **D** también (el grupo **TT** puede ir junto o separado del grupo **DD**);
 - que lleven las dos **T** juntas entre sí y las dos **D** separadas;
 - que lleven dos **O** juntas entre sí (no tres) ?.
- 9) Un batallón está compuesto por tres mexicanos, dos ingleses, cuatro franceses y tres holandeses. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en una fila, tomando en cuenta únicamente las nacionalidades,
- en total;
 - que vaya un mexicano en el extremo derecho de la fila;
 - que vaya un mexicano a la derecha de la fila y un inglés en el extremo izquierdo;
 - que vayan todos los de misma nacionalidad juntos entre sí;
 - que vayan todos los de misma nacionalidad juntos entre sí, pero sin juntarse un francés con un mexicano?