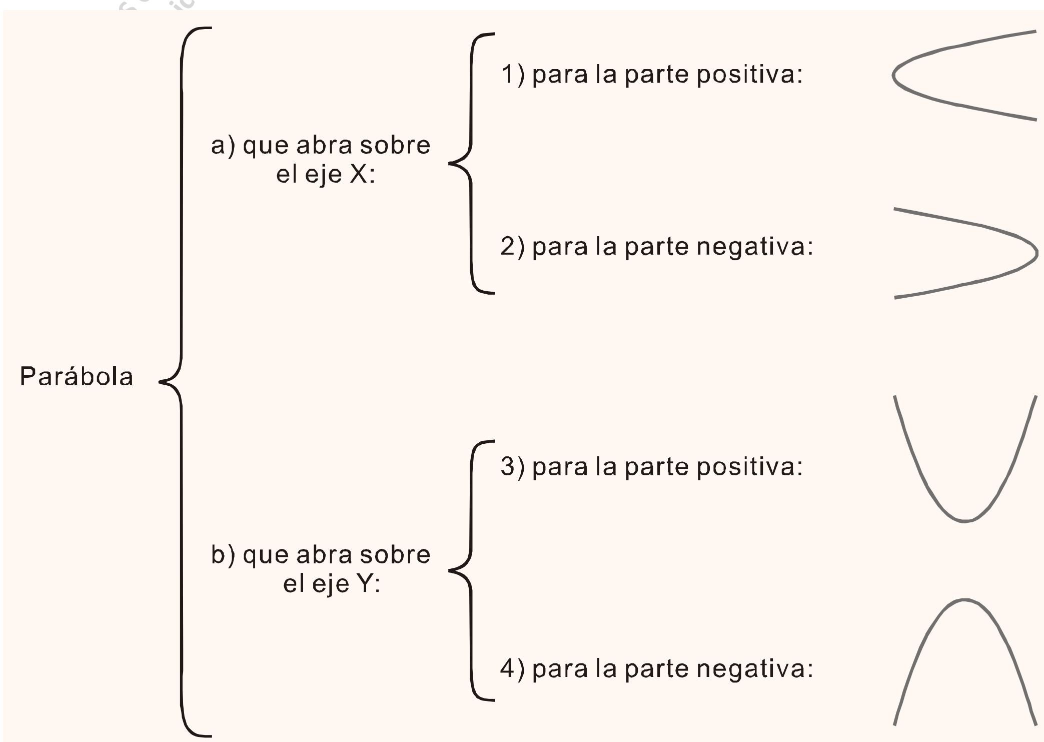
6 LA PARÁBOLA

6.1 DEFINICIONES

La parábola es el lugar geométrico[4] *de todos los puntos cuyas distancias a una recta fija, llamada directriz , y a un punto fijo, llamado foco , son iguales entre sí.*

Hay cuatro posibilidades de obtener una parábola:



[4] *Lugar Geométrico* significa "la figura que se forma con todos los puntos del plano que cumplen con la(s) condición(es) dada", o sea, la gráfica que se forma con los puntos que se definen al hablar del lugar Geométrico.

Cualquiera que sea su posición, la distancia d_1 de cualquier punto de la parábola a la recta llamada *directriz* es igual a la distancia d_2 de ese mismo punto de la parábola al punto llamado *foco*. En la figura 6.1, $d_1 = d_2$

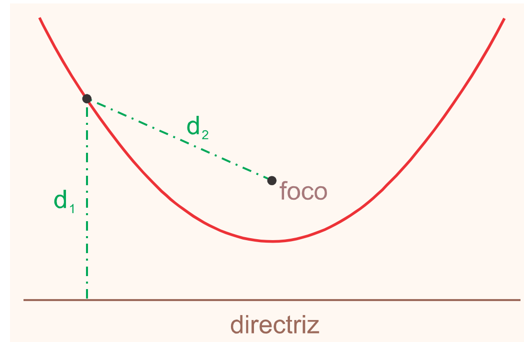


figura 6.1

Las partes principales de una parábola, mostradas en la figura 6.2, son las siguientes:

Eje focal: Es la recta que divide a la parábola simétricamente y que pasa por el foco. Ver figura 6.2.

Vértice: Es el punto donde se intersecan la parábola con el eje focal.

Distancia focal: Es la distancia que existe del foco al vértice y se le asigna la letra p, la cual aparecerá en la ecuación particular de la parábola. Sin embargo, de acuerdo con la definición de la parábola, la distancia p del foco al vértice es igual a la distancia del vértice a la directriz por estar en la misma línea recta perpendicular a dicha directriz.

Las coordenadas del vértice, igual que en la circunferencia, se designan con las letras h y k.

Lado recto: Es la cuerda perpendicular al eje focal y que pasa por el foco. Su longitud es una de las características importantes de la parábola y es igual a $4p$. Ver figura 6.2.

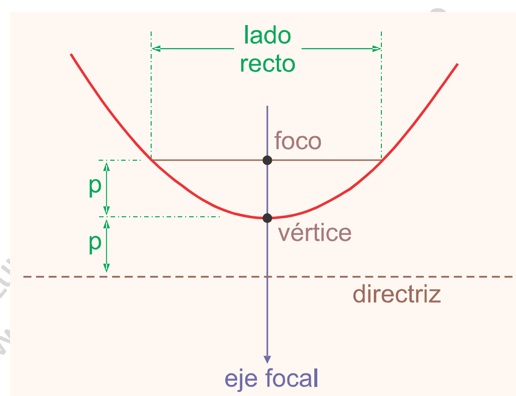


figura 6.2

En todas las cónicas que tienen por lo menos un término al cuadrado, un primer paso, como ya se dijo, en el procedimiento para transformar su ecuación de la forma general a la forma particular consiste en dividir toda la ecuación general entre el número, o números, que dejen con coeficiente 1 a todas las variables "al cuadrado".

En el caso de la parábola, su ecuación en forma general es

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (a)$$

o bien

$$By^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (b)$$

ya que, como se mencionó en las páginas 24 y 25 al hablar del *análisis de la ecuación general*, para que sea parábola se requiere que exista un solo término al cuadrado; además, la parábola abre hacia la variable que carece de cuadrado, por lo que la ecuación (a) abre hacia el eje *ye* y la ecuación (b) abre hacia el eje de las equis.

Si se les aplica el primer paso general, la ecuación (a) queda dividida entre A:

$$\frac{\text{A}}{\text{A}}x^2 + \frac{\text{D}}{\text{A}}x + \frac{\text{E}}{\text{A}}y + \frac{\text{F}}{\text{A}} = 0$$

que simplificada resulta

$$x^2 + \frac{\text{D}}{\text{A}}x + \frac{\text{E}}{\text{A}}y + \frac{\text{F}}{\text{A}} = 0$$

Al final de cuentas, los coeficientes $\frac{\text{D}}{\text{A}}$; $\frac{\text{E}}{\text{A}}$ y $\frac{\text{F}}{\text{A}}$ son números también, por lo que, para simplificar la escritura, se renombran de la siguiente manera:

$\frac{\text{D}}{\text{A}}$ se renombra como D ;

$\frac{\text{E}}{\text{A}}$ se renombra como E ;

$\frac{\text{F}}{\text{A}}$ se renombra como F ;

por lo que esa ecuación suele escribirse en forma abreviada como

$$x^2 + \text{D}x + \text{E}y + \text{F} = 0$$

mientras que la ecuación (b), al quedar dividida entre B y aplicando las mismas consideraciones que a la ecuación (a), puede reducirse y escribirse como:

$$y^2 + \text{D}x + \text{E}y + \text{F} = 0$$

Por estas razones, se acostumbran escribir de la siguiente manera:

La ecuación general de la parábola es

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{si abre hacia el eje } ye.$$

o bien

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{si abre hacia el eje } equis.$$

Las características principales de la parábola son:

1) coordenadas del vértice V;
2) coordenadas del foco f;
3) la distancia focal p;
4) dirección en que abre la parábola;
5) longitud del lado recto,
6) ecuación de la directriz.

La ecuación en forma particular proporciona esas características.

La ecuación particular de la parábola es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad \text{si abre hacia el eje } equis.$$

o bien

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad \text{si abre hacia el eje } ye.$$

En donde h es el desplazamiento del vértice sobre el eje x, mientras que k es el desplazamiento del vértice sobre el eje *ye*. Una relación importante es que la longitud del lado recto es igual a $4p$.

* Si la parábola abre hacia el eje *equis* positivo, el valor de p es positivo.
* Si la parábola abre hacia el eje *equis* negativo, el valor de p es negativo.
* Si la parábola abre hacia el eje *ye* positivo, el valor de p es positivo.
* Si la parábola abre hacia el eje *ye* negativo, el valor de p es negativo.

6.2 TRANSFORMACIONES

Mucha similitud tiene el proceso algebraico de hacer transformaciones entre la circunferencia y las demás cónicas que tienen al menos un término al cuadrado, puesto que en todas ellas volverán a presentarse los binomios $(x-h)$ y $(y-k)$, en los que h y k representan las coordenadas del centro (o del vértice).

Para transformar la ecuación de una parábola de la forma particular a la forma general:

* *Se desarrolla el binomio* $(x - h)^2$ *o* $(y - k)^2$*, según el que aparezca.*
* *Se hacen las multiplicaciones indicadas en el lado derecho.*
* *Se escriben todos los términos en el lado izquierdo para que quede igualado a cero.*
* *Se suman los términos semejantes, si resultan algunos.*

Ejemplo 1: Transformar a la forma general la ecuación $(x-3)^2 = 12(y+1)$

Solución: Elevando al cuadrado el binomio del lado izquierdo y multiplicando por 12 el del lado derecho, se obtiene:

$$x^2 - 6x + 9 = 12y + 12$$

Escribiendo todos los términos en el lado izquierdo:

$$x^2 - 6x + 9 - 12y - 12 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 6x - 12y - 3 = 0}$$

Para transformar la ecuación de una parábola de la forma general a la forma particular:

* *Se divide toda la ecuación entre el coeficiente de* x^2 *o de* y^2*, según el término cuadrático que aparezca;*

* *Se escriben en el lado izquierdo la variable que aparezca al cuadrado con su respectiva lineal.*

* *Se escriben en el lado derecho la variable lineal que carezca de su respectivo cuadrado y el término* F.

* *Con los términos* $x^2 + Dx$ *se completa un trinomio cuadrado perfecto y se factorizan en la forma* $(x - h)^2$ *, o bien con los términos* $y^2 + Ey$ *se completa un trinomio cuadrado perfecto y se factorizan en la forma* $(y - k)^2$.

* *Se factoriza el lado derecho, de manera que la variable lineal quede con coeficiente* 1.

* *Se escribe el factor anterior de la forma* 4p.

Ejemplo 2: Transformar a la forma particular la ecuación $x^2 - 2x - 16y + 81 = 0$ y esbozar[5] su gráfica.

Solución: Escribiendo del lado izquierdo el término al cuadrado con su respectiva variable lineal y del lado derecho la variable lineal que carece de cuadrado junto con la constante, queda:

$$x^2 - 2x = 16y - 81$$

completando un trinomio cuadrado del lado izquierdo y agregando la misma cantidad al lado derecho para que la igualdad no se altere:

$$x^2 - 2x + 1 = 16y - 81 + 1$$

factorizando el lado izquierdo y sumando términos semejantes en el lado derecho, se obtiene que

[5] ESBOZAR significa hacer un trazo no acabado, aproximado, sin detalles finos, apenas con sus características básicas. El dibujo hecho así se llama *esbozo*.

$$(x-1)^2 = 16y - 80$$

y finalmente, factorizando el lado derecho se llega a:

$$\left(x \underbrace{-1}_{-h}\right)^2 = \underbrace{16}_{4p}\left(y \underbrace{-5}_{-k}\right)$$

De aquí se deduce que $h = 1$; $k = 5$; $4p = 16$, de donde $p = 4$. Se trata entonces de una parábola que abre hacia la parte positiva del eje *ye* (porque no hay y^2 y porque p resultó positivo), y cuyo vértice tiene por coordenadas V(1, 5). El esbozo de la parábola se muestra en dos pasos en las figuras 6.3a y 6.3b:

a) Sabiendo que $h=1$ y que $k = 5$ son las coordenadas del vértice, lo primero que se hace es ubicar el vértice con dichas coordenadas (ver figura 6.3a).

b) A partir de que se dedujo que la parábola abre hacia arriba y que $p = 4$, se cuentan cuatro unidades verticalmente hacia arriba a partir de la ubicación del vértice para localizar la ubicación del foco, que es este caso resulta f(1, 9).

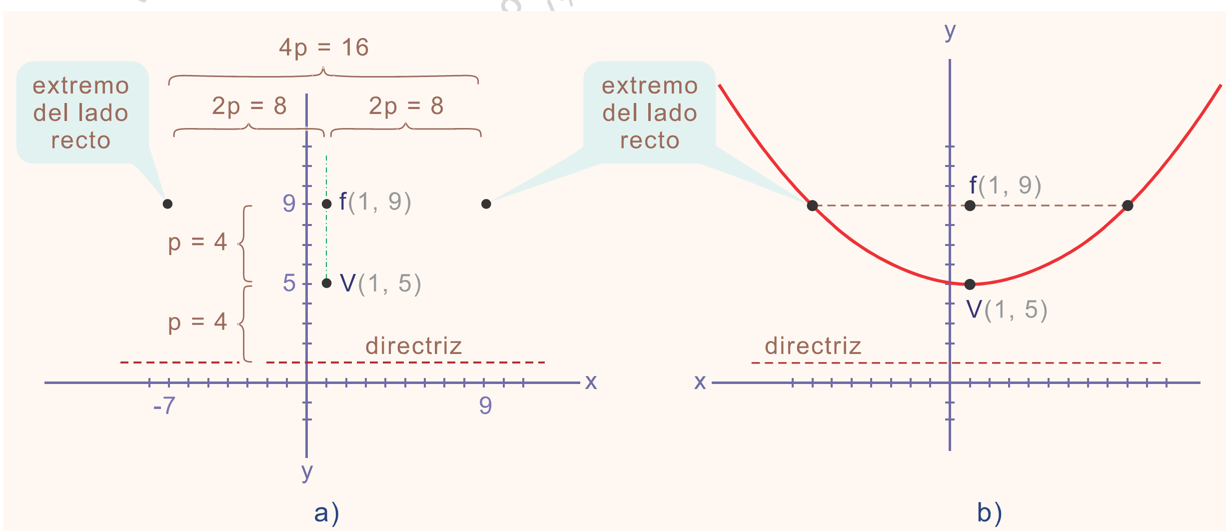


figura 6.3

c) Sabiendo que del vértice hacia la directriz, pero en sentido contrario al foco, también existe la distancia $p = 4$, se cuentan cuatro unidades hacia abajo para localizar a la directriz. En este caso se llega a $y = 1$ por lo que su ecuación es $y = 1$.

d) Sabiendo que el lado recto mide de extremo a extremo una longitud igual a $4p$, se deduce fácilmente que del eje focal o de simetría hacia cada lado de la parábola mide la mitad, o sea $2p$. Como en este caso $p = 4$, significa que hay 8 unidades hacia la izquierda hasta donde termina el lado recto; lo mismo pasa hacia la derecha. Se localizan esos dos punto porque por allí pasa también la parábola. En la figura 6.3a se ha señalado con el comentario "extremo del lado recto".

e) Finalmente se unen los principales puntos de la parábola y así se ha obtenido un esbozo de ella. La figura 6.3b lo muestra.

Ejemplo 3: La ecuación de una parábola es $2y^2 + 16x - 20y + 98 = 0$. Hallar las coordenadas del vértice y del foco y esbozar su gráfica.

Solución: Se trata de una parábola que abre hacia el eje de las *equis*, ya que solamente tienen un término cuadrado y en *equis* nada más hay término lineal. Debe transformarse esta ecuación a la particular para obtener toda la información requerida.

El primer paso en el procedimiento general para transformar la ecuación de cualquier cónica que contenga términos al cuadrados, es dividir entre el coeficiente de éstos. Así que, en este caso, dividiendo entre 2 ambos miembros de la ecuación dada, se reduce a:

$$y^2 + 8x - 10y + 49 = 0$$

Escribiendo del lado izquierdo el término cuadrático con su respectiva variable lineal y del lado derecho la variable lineal que carece de cuadrado junto con la constante, queda:

$$y^2 - 10y = -8x - 49$$

Completando un trinomio cuadrado del lado izquierdo y agregando la misma cantidad al lado derecho para que la igualdad no se altere:

$$y^2 - 10y + 25 = -8x - 49 + 25$$

Factorizando el lado izquierdo y sumando términos semejantes en el lado derecho, se obtiene que

$$(y - 5)^2 = -8x - 24$$

finalmente, factorizando el lado derecho hasta dejar a la x con coeficiente 1 se llega a:

$$\left(\underbrace{y - 5}_{-k}\right)^2 = \underbrace{-8}_{4p}\left(x \underbrace{+3}_{-h}\right)$$

De aquí se deduce que:

$$\begin{array}{llll} \text{si} & -k = -5\text{, entonces} & k = 5 \\ \text{si} & -h = 3\text{, entonces} & h = -3 \\ \text{si} & 4p = -8\text{, entonces} & p = -2 \end{array}$$

Se trata de una parábola que abre hacia la parte negativa del eje de las x (porque no hay término x^2 y porque p resultó negativo), con vértice V(- 3, 5).

Nótese que si $p = -2$, ver figura 6.4, como ésta es la distancia del vértice al foco, en consecuencia las coordenadas del foco son f(- 5, - 5).

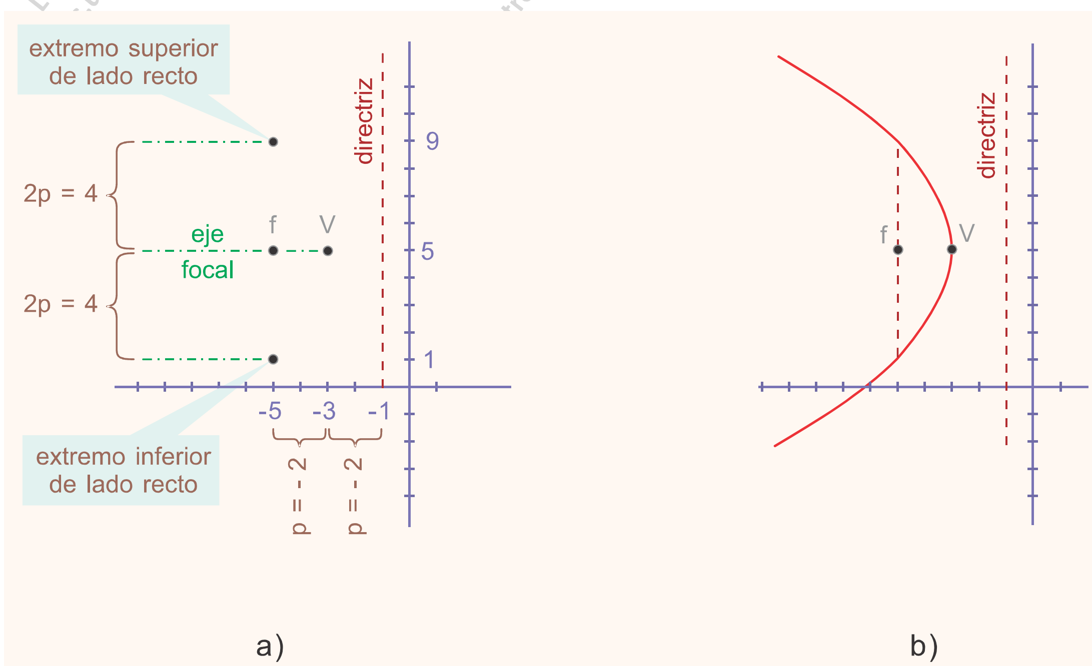


figura 6.4

Ejemplo 4: Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco tiene por coordenadas f(3, 5) y la ecuación de la directriz es $y = -3$.

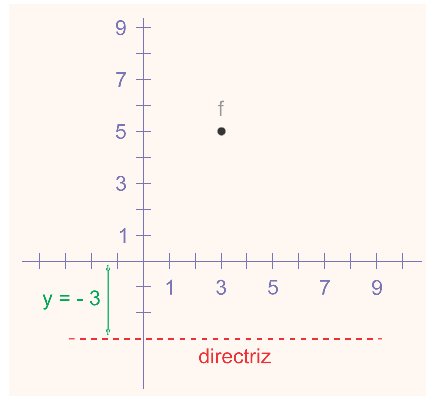


figura 6.5

Solución: Si se hace el esquema gráfico con los datos del enunciado del problema se obtiene inicialmente la figura 6.5. La recta $y = -3$ es paralela al eje de las *equis* ya que al no intervenir la variable x en la ecuación, significa que *en cualquier lugar de equis la ye vale menos tres.* Y eso es lo que resulta. Ver figura 6.5.

Si entre el foco y la directriz existen 8 unidades de distancia, sabiendo que el vértice está situado a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz (ya que la distancia del foco al vértice es la misma que del vértice a la directriz), se deduce fácilmente que el vértice está situado en V(3, 1), que son los valores de h y de k. Es decir, del foco al vértice hay 4 unidades y eso es el valor de p.

Por otra parte, el *eje focal* es paralelo al eje *ye*, es decir, la parábola abre sobre el eje *ye*, y además, por la colocación del vértice y del foco, abre hacia la parte positiva. Esto significa que el valor de p debe ser positivo y que la variable que no tiene término cuadrático es la *ye*.

De manera que se tienen los siguientes datos: $h = 3$; $k = 1$; $p = 4$. Con eso es suficiente para obtener la ecuación particular que le corresponde:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$(x-3)^2 = 4(4)(y-1)$$

$$\boxed{(x-3)^2 = 16(y-1)}$$

Ejemplo 5: El lado recto de una parábola mide 12 unidades y la ecuación de su directriz es $y = 2$. Sabiendo que abre hacia abajo y que el eje focal está sobre la recta $x = 3$, encontrar la ecuación de dicha parábola.

Solución: Conviene comenzar haciendo un esbozo de gráfica con los datos iniciales que se tienen del enunciado. Entonces lo primero que debe ubicarse en la gráfica es la directriz y el eje focal, los cuales se muestran en la figura 6.6.

Si el lado recto mide 12 unidades, significa que $4p = 12$, de donde $p = 3$. A partir de la directriz y contando hacia abajo 3 unidades sobre el eje focal se localiza y se marca el vértice. Luego, otras tres unidades hacia abajo se marca el foco. A continuación se traza el lado recto contando seis unidades hacia la izquierda del foco ($2p$) y seis hacia la derecha.

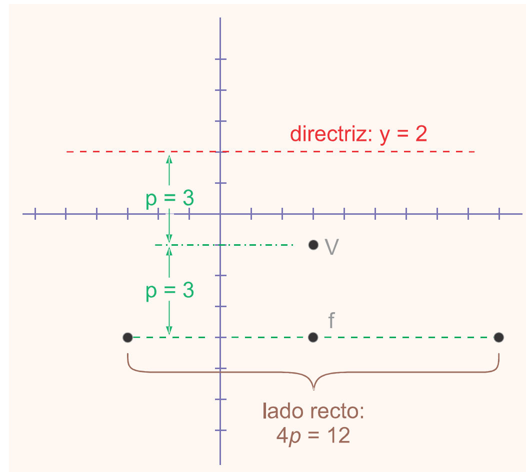


figura 6.6

Con los trazos anteriores se deduce que las coordenadas del vértice son V(3, - 1) y las del foco son $f\left(3, -4\right)$, es decir que $h = 3$ y que $k = -1$.

Ya se tiene toda la información particular de esta parábola; solamente hay que recordar que como la parábola abre hacia abajo, el valor de p se considera negativo, es decir que $p = -3$.

De manera que la ecuación buscada es

$$(x-3)^2 = 4(-3)(y+1)$$

$$\boxed{(x-3)^2 = -12(y+1)}$$

Y la gráfica correspondiente se muestra en la figura 6.7.

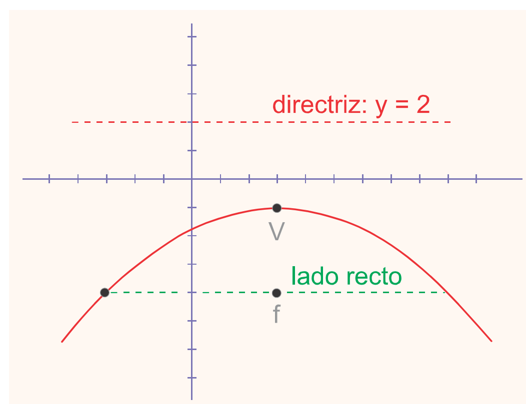


figura 6.7

6.3 APLICACIONES

En la Física de ondas, una parábola tiene la interesante propiedad que todo rayo que salga del foco se refleja paralelamente al eje focal; e inversamente, todo rayo que incida en la parábola con dirección paralela al eje focal, se refleja pasando por el foco.

En la figura 6.8 se representa un espejo en forma parabólica y tres rayos saliendo del foco y reflejándose en la superficie de la parábola. Todos los rayos reflejados salen en dirección paralela al eje focal. Un caso muy típico son los reflectores de luz: éstos tienen su filamento exactamente en la posición del foco con lo que se consigue que casi todos los rayos luminosos salgan en dirección paralela al eje focal, lográndose una iluminación más concentrada.

En la figura 6.9 se representa una antena parabólica. Los rayos que llegan a ella por provenir de distancias muy grandes prácticamente llegan en dirección paralela al eje focal. Al reflejarse, todos los rayos reflejados van hacia el foco, en donde se coloca el receptor y de esta manera capta más cantidad de ondas.

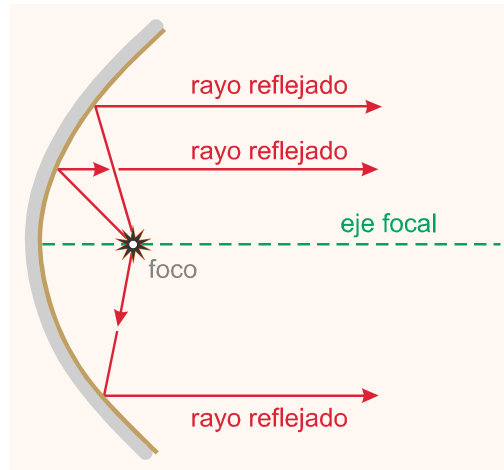


figura 6.8

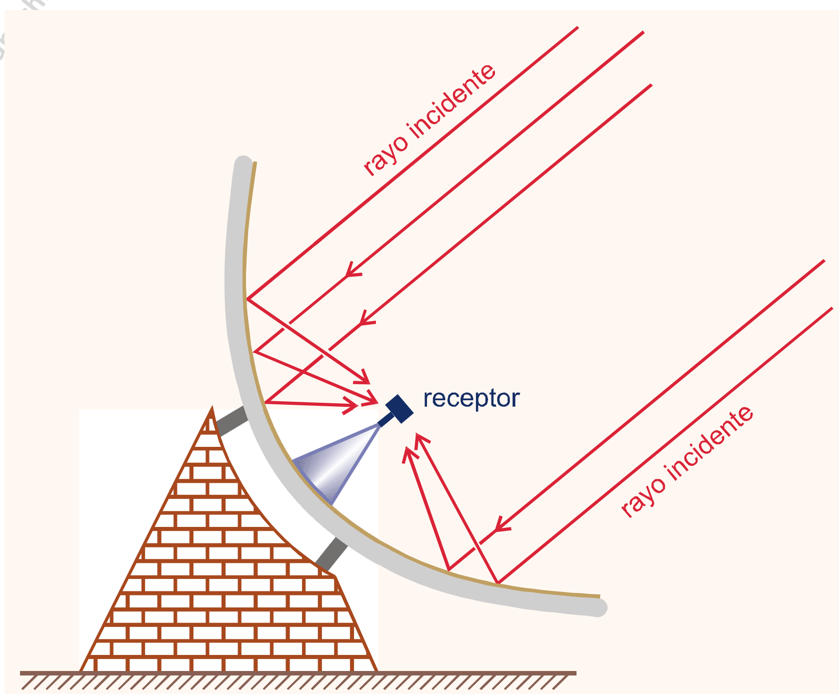


figura 6.9

EJERCICIO 6.1

Transformar las siguientes ecuaciones de parábolas a su ecuación particular y deducir las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco, el valor de p, hacia dónde abre y esbozar su gráfica:

1) $x^2 + 6x - 4y + 5 = 0$
2) $x^2 - 4x - 12y - 56 = 0$
3) $x^2 - 6x + 8y + 25 = 0$
4) $y^2 - 20x + 16y + 44 = 0$
5) $y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$
6) $y^2 + 24x - 6y + 33 = 0$
7) $y^2 - 8x + 8 = 0$
8) $y^2 + 16x + 4y + 4 = 0$
9) $x^2 + 12y + 60 = 0$
10) $x^2 - 14x - 20y + 49 = 0$

Transformar las siguientes ecuaciones de parábolas a su ecuación general y esbozar su gráfica:

11) $(x + 3)^2 = 24(y - 1)$
12) $(x + 7)^2 = 4(y - 11)$
13) $(x + 9)^2 = - 8(y + 10)$
14) $(x - 1)^2 = 12(y - 4)$
15) $x^2 = - 8(y + 10)$
16) $(y - 6)^2 = - 16(x + 6)$
17) $(y - 8)^2 = - 20(x + 1)$
18) $(y - 12)^2 = - 4(x - 2)$
19) $y^2 = - 28(x + 1)$
20) $(y + 4)^2 = - 40x$

En los siguientes ejercicios, hallar la ecuación de la parábola y todos sus elementos restantes:

21) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(2, 2) y las del foco f(6, 2).

22) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(2, - 2) y las del foco f(2, - 5).

23) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(- 3, - 1) y las del foco f(0, - 1).

24) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(5, 3) y las del foco f(- 1, 3).

25) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(- 4, - 2) y las del foco f(- 4, 4).

26) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(9, 1) y las del foco f(9, - 5).

27) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(3, 1) y las del foco f(- 1, 1).

28) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(2, 5) y la ecuación de la directriz es $x = 4$.

29) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(- 3, 0) y la ecuación de la directriz es $y = 4$.

30) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(- 2, - 2) y la ecuación de la directriz es $y = - 3$.

31) Las coordenadas del vértice de una parábola son V(7, 3) y la ecuación de la directriz es $x = 5$.

32) Las coordenadas del foco de una parábola son f(0, - 2) y la ecuación de la directriz es $x = 6$.

33) Las coordenadas del foco de una parábola son f(0, 3) y la ecuación de la directriz es $x = - 8$.

34) Las coordenadas del foco de una parábola son f(1, 2) y la ecuación de la directriz es $y = 8$.

35) Las coordenadas del foco de una parábola son f(3, 7) y la ecuación de la directriz es $x = - 3$.

36) Las coordenadas del foco de una parábola son f(0, 7) y la longitud del lado recto es 8. Abre hacia la parte positiva del eje de las x.

37) Las coordenadas del foco de una parábola son f(1, 1) y la longitud del lado recto es 12. Abre hacia la parte negativa del eje de las x.

38) Las coordenadas del foco de una parábola son f(- 3, - 1) y la longitud del lado recto es 16. Abre hacia la parte positiva del eje de las ye.

39) Las coordenadas del foco de una parábola son f(11, 0) y la longitud del lado recto es 4. Abre hacia la parte negativa del eje de las ye.

PROBLEMAS ESPECIALES

40) Considérense dos parábolas P_1 y P_2. La ecuación de la parábola P_1 es $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$. Hallar la ecuación de la parábola P_2 sabiendo que el foco de la parábola P_1 es el vértice de la parábola P_2; y el vértice de la parábola P_1 es el foco de la parábola P_2.

41) Considérense dos parábolas P_1 y P_2. La ecuación de la parábola P_1 es $y^2 + 12x - 2y + 25 = 0$. Hallar la ecuación de la parábola P_2 sabiendo que el vértice de la parábola P_1 es el vértice de la parábola P_2; el valor de p es el mismo para ambas parábolas y la parábola P_2 abre hacia el eje ye^-.

42) El centro de la circunferencia $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$ es el vértice de una parábola que abre hacia el eje x^+. Hallar la ecuación de dicha parábola sabiendo que su foco está sobre la misma circunferencia.

43) El diámetro horizontal de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$ es el lado recto de una parábola que abre hacia el eje ye^+. Hallar la ecuación de dicha parábola.

44) El centro de la circunferencia $(x + 5)^2 + (y + 9)^2 = 45$ es el vértice de una parábola. Dicha circunferencia pasa exactamente por los punto B(1, - 6) y C(- 11, - 6). El segmento de recta BC que une a dichos puntos es el lado recto de la parábola. Encontrar la ecuación de tal parábola.

45) Hallar la ecuación de la parábola de vértice V(1, 5), abre sobre ye^+ y que pasa por el punto P(5, 9).

46) Hallar la ecuación de la parábola de vértice V(5, - 1), abre sobre ye^+ y que pasa por el punto P(13, 7).

47) Hallar la ecuación de la parábola que abre hacia ye^-, que pasa por los puntos P(8, - 4) y Q(0, - 20) y cuyo lado recto mide $lr = 2$.

6.4 INSTRUCCIONES PARA CONSTRUIR UNA PARÁBOLA CON PAPEL

1) En una hoja tamaño carta de papel albanene, trazar una línea horizontal en la parte inferior de la hoja, a 3 centímetros (la directriz) del extremo (ver figura 6.10).

2) Dibujar un punto 2 centímetros arriba de la línea anterior y en el centro de la hoja (ver figura 6.10).

3) Doblar la hoja por la parte posterior, de manera que la línea trazada en el paso 1 coincida con el punto del paso 2 (ver figura 6.11). Marcar bien el doblez.

4) Repetir el paso anterior haciendo coincidir ahora otro punto de la recta del paso 1 con el punto del paso 2 (ver figura 6.12).

5) Continuar así hasta llenar de dobleces la hoja.

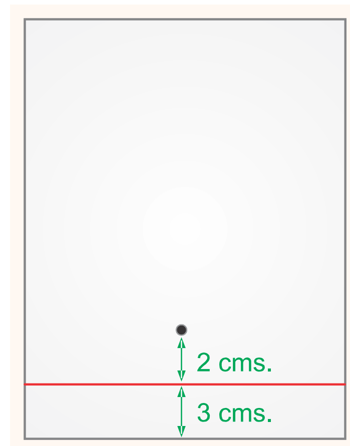


figura 6.10

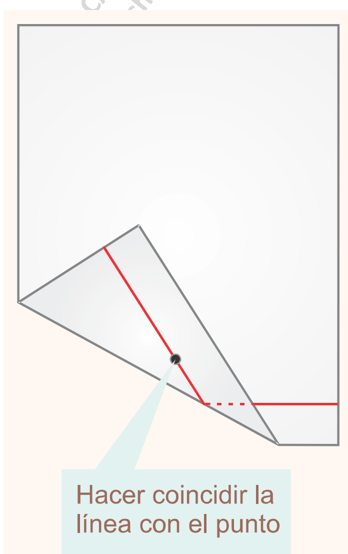


figura 6.11

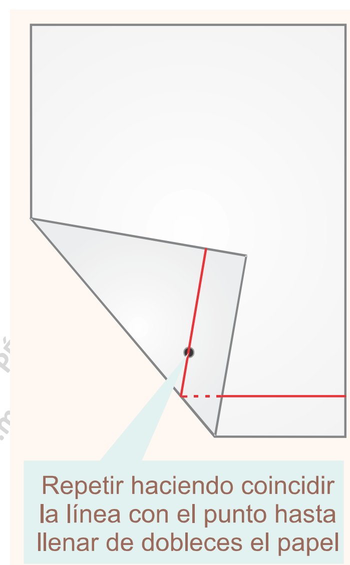


figura 6.12