



# MANUAL DE PRÁCTICAS DE

**CABRI GÉOMÈTRE® II**

El cuaderno de geometría interactiva  
Por Jean-Marie Laborde & Franck Bellemain

**Versión 1.0 MS Windows**

Para mayor información:  
ti-cares@ti.com <http://www.ti.com/calc>  
En España: 91 5140980  
En Norteamérica: 800-TI-CARES (800-842-2737)

 **TEXAS INSTRUMENTS**

© 1988-98 IMAG-CNRS-UJF      Cabri-géomètre II es una marca registrada de Université Joseph Fourier

## DEPENDENCIAS E INDEPENDENCIAS

### EJERCICIOS PRELIMINARES PARA FAMILIARIZARSE CON LAS PRINCIPALES HERRAMIENTAS DE CABRI

#### EJERCICIO 1

Construir una circunferencia  $C_2$  que sea tangente exterior a otra circunferencia  $C_1$  y que gire tangente alrededor de  $C_1$  (figura 1).

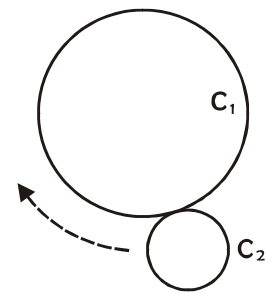


figura 1

#### PROCEDIMIENTO:

- 1) Construir una circunferencia  $C_1$  independiente en cualquier parte del área de trabajo. Para ello, dar clic sin soltar en el cuarto icono de izquierda a derecha y arrastrar hasta activar **Circunferencia**. Hasta entonces soltar el botón del ratón. Ver figura 2.
- 2) Construir otra circunferencia  $C_3$  que tenga el mismo centro que  $C_1$ , de manera que  $C_3 > C_1$ .
- 3) Colocar un punto  $A$  sobre la circunferencia  $C_3$ . El punto  $A$  debe ser *dependiente* de la circunferencia  $C_3$ ; para comprobarlo, dar clic sin soltar sobre dicho punto y moverlo para todos lados: si no se sale de la circunferencia está bien construido, si se, sale está mal.
- 4) Trazar una recta que pase por el centro de la circunferencia  $C_1$  y por el punto  $A$ .
- 5) Marcar el punto  $B$  de intersección de la circunferencia  $C_1$  con la recta anterior.
- 6) Construir la circunferencia  $C_2$  con centro en el punto  $A$  y radio hasta el punto  $B$ .
- 7) Activar el comando **ocultar/mostrar** (primer icono de derecha a izquierda). Ocultar la circunferencia  $C_3$ , la recta y el punto  $B$ .
- 8) Mover el punto  $A$ .

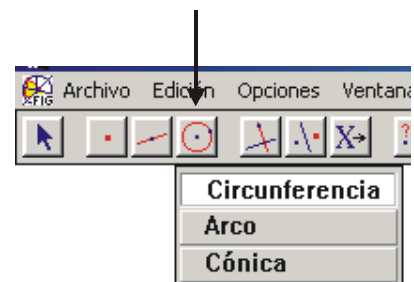


figura 2

EJERCICIO 2

Construir una estrella regular como la mostrada en la figura 3 de la derecha. Los pasos que continúan son el procedimiento a seguir.

- 1) Colocar un punto  $A$  y un punto  $m$  en el centro de la pantalla y aproximadamente como a 3 centímetros de separados.
- 2) Construir una circunferencia  $C$  con centro en el punto  $A$  y radio  $Am$ .
- 3) Colocar un punto  $B$  en la circunferencia anterior (dependiente).
- 4) Construir otra circunferencia con centro en el punto  $B$  y radio hasta el punto  $A$ .
- 5) Marcar los dos puntos de intersección de ambas circunferencias (ver figura 4).
- 6) Construir otras dos circunferencias con centro en cada uno de estos dos puntos de intersección y radio hasta el punto  $A$ .
- 7) Repetir el proceso hasta tener seis circunferencias iguales, todas con centro en la circunferencia central  $C$ . Ver figura 5.
- 8) Marcar los puntos de intersecciones entre estas seis circunferencias Ver figura 5.
- 9) Trazar segmentos uniendo los puntos de intersecciones obtenidos en el paso anterior con los centros de las seis circunferencias, de manera que se forme la estrella.
- 10) Activar el comando **ocultar/mostrar** en el primer icono de derecha a izquierda. Ocultar todas las circunferencias y todos los puntos, excepto los puntos  $B$  y  $m$ .
- 11) Mover el punto  $B$  y observar qué pasa.
- 12) Mover el punto  $m$  y observar qué pasa.

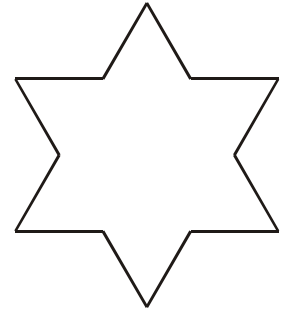


figura 3

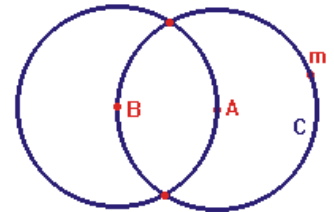


figura 4

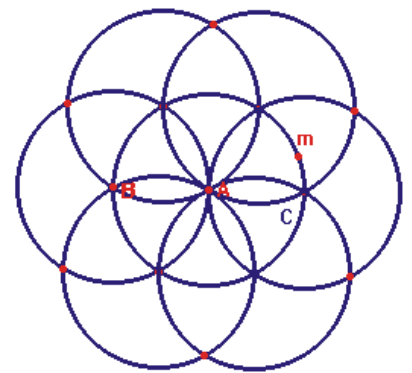


figura 5

### EJERCICIO 3

Construir cuatro circunferencias tangentes interiores a otra circunferencia, separadas 90 grados cada una, que giren al mismo tiempo de manera tangencial. Recordar ocultar todos los trazos auxiliares. Ver figura 6.

Este ejercicio tiene como fundamento lo realizado en el ejercicio 1.

Es indispensable escribir un comentario indicando qué punto o qué línea debe arrastrarse para hacer que las circunferencias giren.

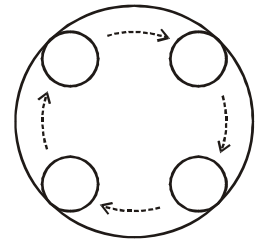


figura 6

### EJERCICIO 4

Construir a base de segmentos, **no** empleando la herramienta **Triángulo** ni tampoco **Polígono regular**, un triángulo rectángulo cualquiera de tal manera que se pueda cambiar de tamaño y/o de posición, pero que siga siendo triángulo rectángulo.

Es indispensable escribir un comentario indicando qué punto o qué línea debe arrastrarse para hacer que el triángulo se mueva o cambie de tamaño. Para que sea un triángulo rectángulo cualquiera deben poderse variar los ángulos agudos y las longitudes de sus lados, aunque no sea todo al mismo tiempo, pero que el ángulo recto siempre permanezca.

### EJERCICIO 5

Construir a base de segmentos un triángulo equilátero de tal manera que se pueda cambiar de tamaño (no importa si además gira), pero que siga siendo triángulo equilátero. Es indispensable escribir un comentario indicando qué punto o qué línea debe arrastrarse para hacer que el triángulo se mueva o cambie de tamaño.

No debe emplearse la herramienta **Triángulo** ni tampoco **Polígono regular**. Deben ocultarse todos los trazos auxiliares, ya sean rectas o circunferencias, de manera que solamente quede visible el triángulo equilátero que pide el enunciado y si acaso también algún punto desde el que haya que arrastrar la figura para hacerla cambiar de tamaño.

## MEDIANAS, MEDIATRICES, BISECTRICES, PARALELAS, PERPENDICULARES Y PUNTOS MEDIOS

A partir de este ejercicio deberá darse formato a las figuras, es decir, poner colores diferentes, grosores distintos a las líneas, etc. Lo anterior se consigue dando clic en el primer icono de derecha a izquierda y activando la opción que se desee. Ver figura 7.

No se trata de llenar de colores, sino de facilitar a simple vista la diferenciación entre diversas líneas o figuras. Por ejemplo, en el ejercicio 6, las tres mediatrices deben llevar un mismo color, la circunferencia otro y el triángulo otro (figura 8).

Tomar como norma que las líneas y/o puntos principales de la figura (las que menciona el enunciado) deben estar con color oscuro y línea continua, mientras que las líneas secundarias de preferencia deben ir con línea punteada y delgada, no gruesa. Los trazos auxiliares, es decir aquellos que no menciona el enunciado pero que tuvieron que agregarse para poder hacer la construcción, deben ocultarse.

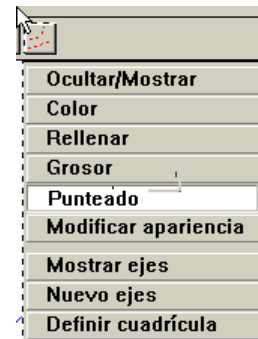


figura 7

### EJERCICIO 6

- 1) Construir a base de segmentos, **no** empleando la herramienta **Triángulo**, un triángulo cualquiera.

Cuando se dice *un triángulo cualquiera* debe entenderse que se refiere a un triángulo tal que al mover uno o más de sus vértices pueda variarse de forma independiente tanto las longitudes de sus lados como sus ángulos. Si se hace un triángulo rectángulo que se haga grande o chico, pero que siempre sea rectángulo, no es un triángulo cualquiera, sino un triángulo rectángulo cualquiera. Si se hace un triángulo equilátero que se haga grande o chico, pero que siempre sea equilátero, no es un triángulo cualquiera,

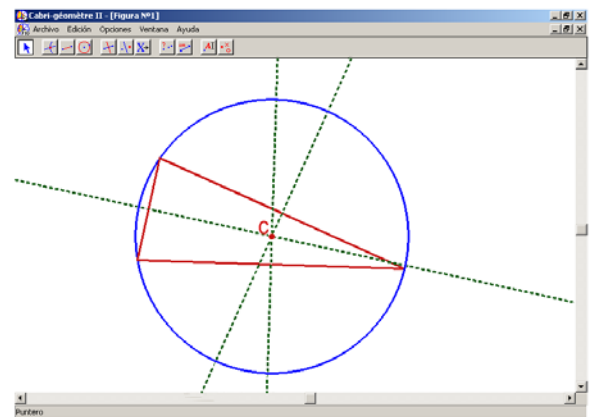


figura 8

sino un triángulo equilátero cualquiera.

- 2) Trazar sus tres mediatrices con la herramienta **Mediatriz**. Ésta se localiza en el quinto icono de izquierda a derecha. Ver figura 9. La mediatriz es la perpendicular levantada desde el punto medio.
- 3) Comprobar que las mediatrices se cortan en el mismo punto  $C$  (circuncentro), aunque varíe la forma del triángulo. El punto  $C$  puede cambiar de lugar, pero siempre es el punto donde coinciden las tres mediatrices. Incluso puede salirse del triángulo.
- 4) Comprobar que dicho punto  $C$  es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (circun = alrededor, por la parte de afuera). La comprobación se obtiene al mover cada uno de los vértices del triángulo, verificando que la circunferencia sigue pasando por los tres vértices, aunque cambie de tamaño y forma el triángulo.

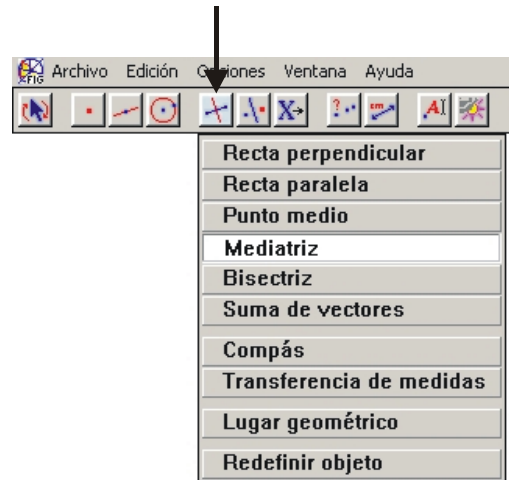


figura 9

Si primero se construye la circunferencia y después el triángulo, el ejercicio estará mal. Debe hacerse la construcción en el orden en que van apareciendo los pasos en el enunciado. En este caso, primero el triángulo cualquiera y después la circunferencia.

Una idea del formato está dado en la figura 8. No debe rellenarse en su interior con colores absolutamente nada.

### EJERCICIO 7

- 1) Construir a base de segmentos un triángulo cualquiera, no empleando la herramienta **Triángulo**.
- 2) Trazar sus tres bisectrices. Para trazar una bisectriz con Cabri debe activarse la herramienta **Bisectriz** en el 5º icono de izquierda a derecha (ver figura 9). Después debe darse clic en tres puntos que recorran el ángulo en orden como si se estuviera dibujando. Por ejemplo, para trazar la bisectriz de la figura 10, debe darse clic primero en  $a$ ; luego en  $b$  y finalmente en  $c$ . O bien comenzando en  $c$ ; luego en  $b$  y finalmente en  $a$ .

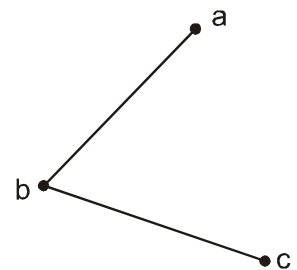


figura 10

- 3) Comprobar que las bisectrices se cortan en el mismo punto **I** (incentro), aunque varíe la forma del triángulo.
- 4) Comprobar que dicho punto **I** es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo (ver figura 11). Una circunferencia está inscrita en un triángulo si sus tres lados son tangentes a dicha circunferencia.

El error principal que suele cometer el alumno en este ejercicio es suponer que los puntos de intersección de cada lado con la bisectriz respectiva es el punto de tangencia entre la circunferencia y dicho lado. Y no es así. Analícese bien la figura 11.

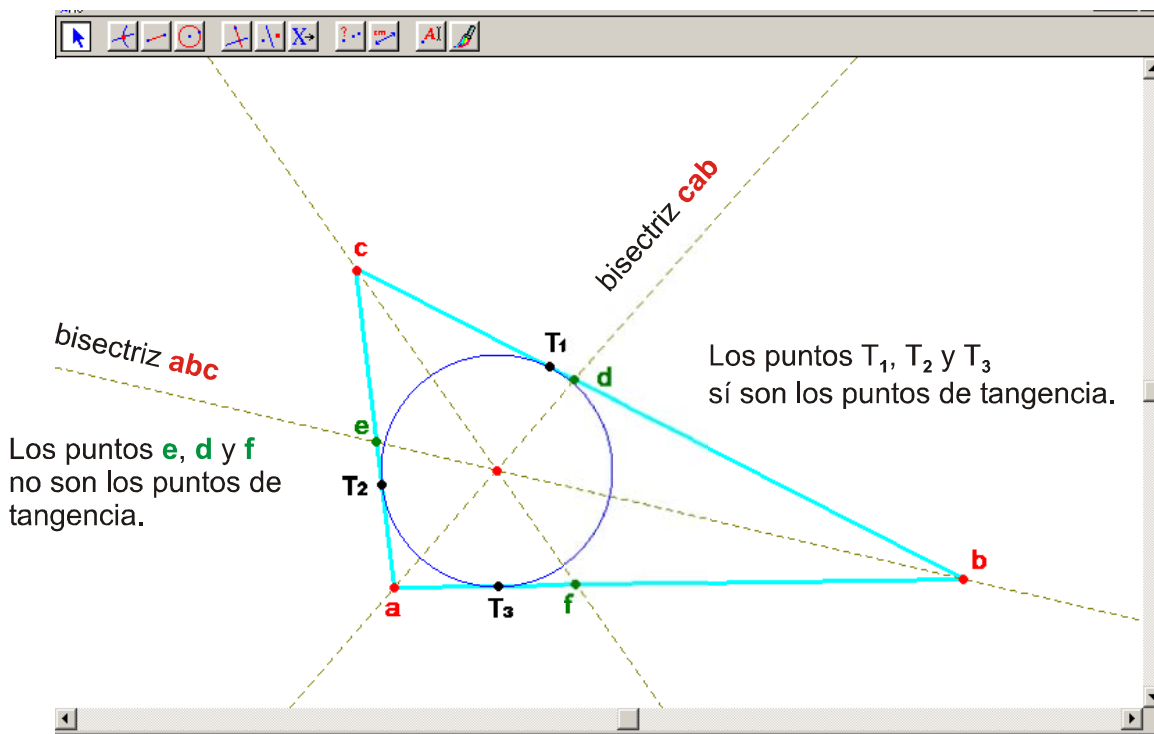


figura 11

Cuando en la construcción el estudiante toma los puntos  $d$ ,  $e$  o  $f$  como los puntos de tangencia para trazar la circunferencia, al intentar comprobar que el punto  $I$  es el incentro, la circunferencia en ciertas posiciones se le sale del triángulo. La comprobación se obtiene al mover cada uno de los vértices del triángulo, verificando que la circunferencia sigue quedando inscrita al triángulo, o sea, quedando tangente siempre a cada uno de sus lados, aunque cambie de tamaño y forma el triángulo. Para es importante tener en cuenta que el radio en el punto de tangencia es perpendicular al lado. Mientras no se

haga cumplir esta propiedad, la circunferencia no quedará inscrita al triángulo, es decir, se saldrá de él al mover los lados.

### EJERCICIO 8

- 1) Construir a base de segmentos, no empleando la herramienta **Triángulo**, un triángulo cualquiera.
- 2) Trazar sus tres medianas.
- 3) Comprobar que las medianas se cortan en el mismo punto  $B$  (baricentro), aunque varíe la forma del triángulo.

### EJERCICIO 9

- 1) Construir a base de segmentos, no empleando la herramienta **Triángulo**, un triángulo cualquiera.
- 2) Trazar sus tres alturas.
- 3) Comprobar que las alturas se cortan en el mismo punto  $O$  (ortocentro), aunque varíe la forma del triángulo.

### EJERCICIO 10

- 1) Construir un paralelogramo cualquiera. Se entiende por *paralelogramo cualquiera* aquella figura que al mover sus vértices o lados, aunque se haga grande y/o chica, sus lados opuestos sigan siendo paralelos y pueda convertirse en rombo, o en romboide, o en rectángulo o en cuadrado. Si se construye un rectángulo y al hacerlo cambiar de tamaño sigue siendo rectángulo, no es un paralelogramo cualquiera, sino un rectángulo cualquiera. En otras palabras, deben poderse variar sus ángulos y la longitud de sus lados, sin que sus lados opuestos dejen de ser paralelos.
- 2) Trazar sus dos diagonales.
- 3) Comprobar poniendo medidas que las dos diagonales se bisecan mutuamente (*bi* = dos; *secare* = cortar: *bisecar* significa cortarse a la mitad). Escribir un comentario para indicar qué punto o línea debe arrastrarse para hacer cambiar la longitud de cada lado y aumentar o disminuir el ángulo.



## EJERCICIO 11

- 1) Construir un rombo cualquiera. Será *un rombo cualquiera* si pueden hacerse grandes y chicos sus lados, así como variar sus ángulos interiores sin que deje de ser rombo. Para que sea rombo sus cuatro lados deben ser iguales y además debe ser paralelogramo.
- 2) Comprobar que sus diagonales son perpendiculares. Esto puede hacerse con la herramienta de verificación, cuarto icono de derecha a izquierda (figura 12), activando **Perpendicular**, después dando clic en cada una de las dos líneas que se quiere saber si son perpendiculares y finalmente arrastrando la respuesta hasta la parte de la pantalla en donde se desea fijar dicha respuesta y dando clic allí. Editar la respuesta para que quede redactada de manera semejante a como se muestra en la figura 13.

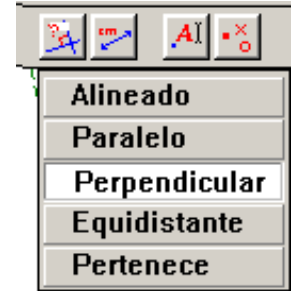
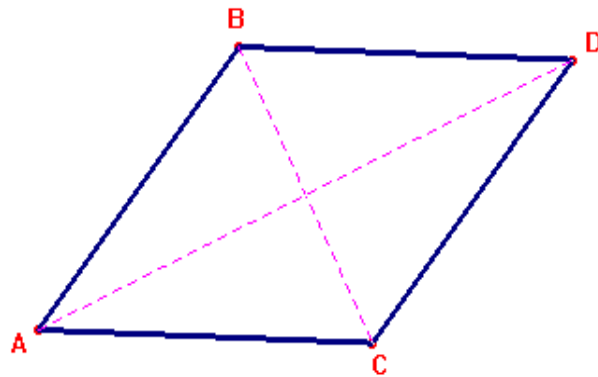


figura 12

Escribir un comentario para indicar qué punto o línea debe arrastrarse para hacer cambiar la longitud de los lados y el tamaño de sus ángulos del rombo. Deben ocultarse todos los trazos auxiliares y quedar visibles exclusivamente los objetos que menciona el enunciado del problema, es decir, el rombo y las diagonales.



Al mover el punto B cambian de longitud los lados; al mover el punto C varían los ángulos.

Las diagonales AD y BC son perpendiculares.

figura 13

Nota importante: Debe construirse primero el rombo y después sus diagonales. Si el rombo está bien hecho las diagonales quedarán automáticamente perpendiculares, que es lo que se pretende demostrar. Si se construyen primero las diagonales con la herramienta **Rectas Perpendiculares** y a partir de ellas se construye el rombo, estará mal el ejercicio, pues resulta absurdo pretender demostrar que las diagonales son perpendiculares cuando así se hicieron con la herramienta.

### EJERCICIO 12

- 1) Construir a base de segmentos, sin emplear la herramienta **Polígono**, un rectángulo cualquiera. Si al variar la longitud de uno de sus lados cambia también de manera proporcional el lado adyacente entonces no es un rectángulo cualquiera.
- 2) Trazar sus diagonales.
- 3) Comprobar que sus diagonales son iguales. Escribir un comentario para indicar qué punto o línea debe arrastrarse para hacer cambiar de proporción y tamaño al rectángulo.

### EJERCICIO 13

- 1) Construir a base de segmentos, no empleando la herramienta **Polígono**, un cuadrado cualquiera.
- 2) Trazar sus diagonales.
- 3) Comprobar que sus diagonales son perpendiculares. Ver inciso 2 del ejercicio 11.
- 4) Comprobar que sus diagonales son iguales. Escribir un comentario para indicar qué punto o línea debe arrastrarse para hacer cambiar de tamaño al cuadrado. Recordar que debe construirse primero el cuadrado y después trazar sus diagonales; si se hace a la inversa estará mal.

### EJERCICIO 14

- 1) Trazar un segmento  $AB$  en cualquier parte de la pantalla.
- 2) Sobre el segmento  $AB$  colocar un punto cualquiera  $P$  dependiente del segmento.
- 3) Construir una circunferencia que sea tangente en el punto  $P$  al segmento  $AB$  y que tenga su centro  $C$  en cualquier parte, menos sobre el segmento  $AB$ . Ver figura 14.

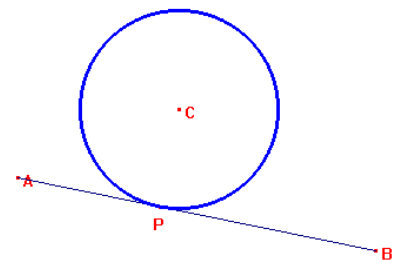


figura 14

NOTA: Al mover el punto  $P$  (figura 14) deberá moverse la cir-

cunferencia tangencialmente al segmento  $AB$  y al mover el punto  $C$  deberá cambiar de tamaño la circunferencia. Al mover los puntos  $A$  y  $B$  deberá moverse todo el conjunto, sin dejar de ser tangente la circunferencia.

## TRANSFERENCIA DE MEDIDAS

En muchos casos se necesita copiar una medida de un segmento y pasarla a otro lado. Por ejemplo, si se quieren construir dos circunferencias iguales en diferentes partes de la pantalla, lo que se hace es copiar el radio de la primera de ellas y transferirlo a la otra circunferencia. **Transferir** significa pasar o llevar algo desde un lugar a otro. Aquí lo que se lleva de un lugar a otro es la medida.

### EJERCICIO 15

El objetivo de este ejercicio es aprender a realizar transferencias (copias) de medidas, acción que se ocupará en varios ejercicios posteriores.

- 1) Poner un punto  $A$  en la parte superior izquierda de la pantalla.
- 2) Trazar una semirrecta desde  $A$  hacia la parte derecha de la pantalla, de manera que quede lo más aproximadamente horizontal. Se puede conseguir oprimiendo simultáneamente la tecla **SCHIFT** y el botón izquierdo sin soltar del ratón.
- 3) Colocar un punto  $B$  sobre la semirrecta.
- 4) Trazar el segmento  $AB$ .
- 5) Ocultar la semirrecta. Pruébese que al mover el punto  $B$  solamente puede desplazarse de manera horizontal y que no puede pasarse hacia la izquierda del punto  $A$ . Ese es el objetivo de la semirrecta. El segmento así construido  $AB$  se llama **línea guía**, que será empleado en varios ejercicios posteriores. Una línea guía no debe girar, salvo que así se pida, ni el extremo derecho  $B$  debe pasar a la izquierda del otro extremo  $A$ .
- 6) Colocar un punto  $D$  cualquiera en cualquier parte de la pantalla, no alineado con  $AB$ .
- 7) Trazar una semirrecta a partir de  $D$  y hacia cualquier otra parte de la pantalla.

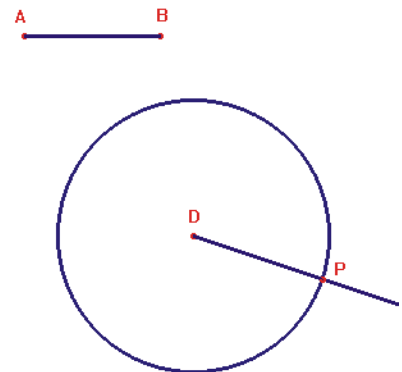


figura 15

- 8) En el 5° icono de izquierda a derecha, buscar **Compás** y activarlo. Ir al segmento  $AB$  y dar clic allí (así se copia su longitud, como con un compás); luego ir al punto  $D$  y dar clic allí (es el equivalente a poner la punta del compás en  $D$ ). Aparecerá una circunferencia de radio igual a  $AB$ .
- 9) Marcar el punto  $P$  de intersección de la semirrecta en  $D$  y la circunferencia anterior (ver figura 15).
- 10) Trazar el segmento  $DP$ . Lo que se ha hecho hasta este momento es transferir (copiar) la longitud de la línea guía  $AB$  para tomarla como radio de la circunferencia.
- 11) Ocultar la circunferencia y la semirrecta en  $D$ .
- 12) Probar que al mover el punto  $B$  (al cambiar la longitud de la línea guía), el segmento  $DP$  variará su longitud siendo siempre igual al segmento  $AB$ . Este es un procedimiento para “copiar” una medida.
- 13) Marcar otro punto  $E$  cualquiera (sin dependencias) en otro espacio de la pantalla.
- 14) Activando **Distancia y longitud**, tercer icono de derecha a izquierda, marcar numéricamente la longitud del segmento  $AB$ , dando clic en dicho segmento.
- 15) En el 5° icono de izquierda a derecha, buscar **Transferencia de medidas** y activarlo. Aproximarse a la longitud del segmento  $AB$  y copiarla dando clic allí cuando pregunte “¿este número?”.
- 16) Llevar la medida copiada en el paso anterior al punto  $E$  y dar clic allí. Obsérvese que el nuevo segmento punteado que apareció se moverá giratoriamente conforme se mueva el ratón. Para fijarlo debe darse clic en el sitio deseado. Al punto nuevo así fijado al dar clic llamarlo  $F$ . Ver figura 15.
- 17) Trazar el segmento  $EF$ .
- 18) Probar que al mover el punto  $B$  (al cambiar la longitud de la línea guía), el segmento  $EF$  variará su longitud siendo siempre igual al segmento  $AB$ . Este es otro procedimiento para “copiar” una medida siempre que sea numérica. Obsérvese cómo los dos segmentos  $DP$  y  $EF$  varían su longitud al mover el punto  $B$ , siendo iguales a  $AB$ . La diferencia es que el segmento  $DP$  no puede girar por tener una dependencia de la semirrecta, mientras que el segmento  $EF$  puede girar moviendo el punto  $F$  por no tener más dependencia que su longitud con  $AB$ .

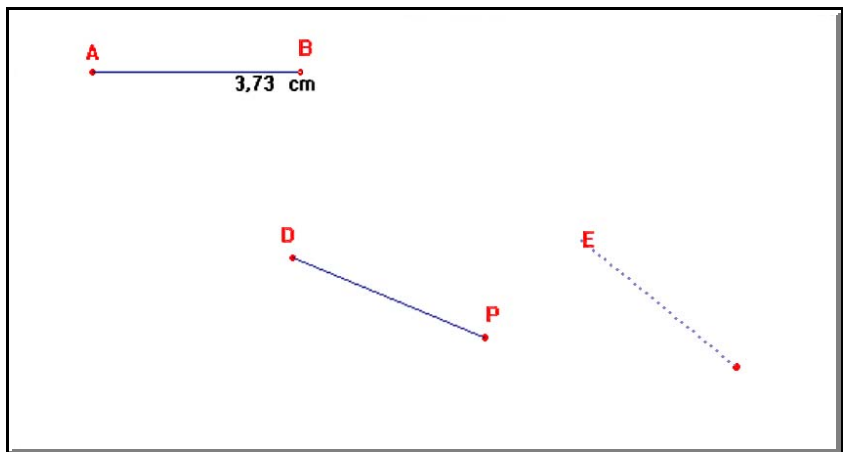


figura 16

EJERCICIO 16

- 1) Trazar una línea guía  $AB$  en la parte superior izquierda de la pantalla. Ponerle su longitud. Recordar que una línea guía no debe girar ni el extremo derecho  $B$  debe pasarse al otro lado del extremo  $A$ .
- 2) En otro espacio del área de trabajo, construir un triángulo equilátero a base de segmentos, sin emplear la herramienta **Polígono**, cuyos lados midan igual que el segmento  $AB$ . Poner la medida de al menos uno de los lados. Recordar que deben ocultarse todos los trazos auxiliares y solamente dejar visible en la pantalla la línea guía y el triángulo equilátero con las letras de sus vértices.

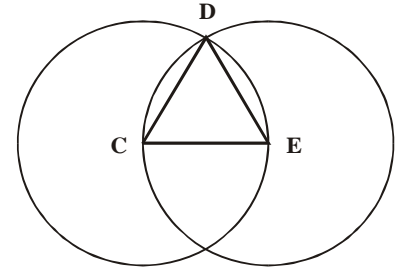


figura 17

SUGERENCIA: Para trazar en el papel con regla y compás un triángulo equilátero, un procedimiento es el señalado en la figura 17. El centro de la circunferencia  $E$  está sobre la circunferencia  $C$ . De esta manera el radio  $CE$  es común para ambas circunferencias. El lado  $DC$  es un radio igual a  $CE$  (pertenecce a la circunferencia  $C$ ) y el radio  $DE$  es igual al radio  $EC$  (pertenecce a la circunferencia  $E$ ). Por lo tanto, los tres lados del triángulo  $CDE$  son iguales por ser radios de circunferencias iguales.

EJERCICIO 17

- 1) Trazar una línea guía  $AB$ . Ponerle su longitud.
- 2) En otro espacio del área de trabajo, construir un cuadrado a base de segmentos, **sin** emplear la herramienta **Polígono**, cuyos lados midan igual que el segmento  $AB$ . Ponerle al menos a uno de los lados su medida.

EJERCICIO 18

- 1) Trazar dos líneas guías  $AB$  y  $CD$ , independientes una de la otra. Ponerles sus medidas y diferente color para diferenciarlas.
- 2) Construir un rectángulo cuyos lados midan lo mismo que  $AB$  y  $CD$ , respectivamente. Ponerles sus longitudes y que coincidan con el color de sus líneas guías de las que dependen.
- 3) Construir en otro espacio de la pantalla dos circunferencias que tengan radios  $AB$  y  $CD$ . Ponerles sus longitudes a sus radios y que coincidan con el color de sus líneas guías de las que dependen. Deben

ser totalmente independientes entre sí los rectángulos de las circunferencias..

- 4) Variar la longitud de los segmentos guías para verificar que tanto el rectángulo como las dos circunferencias cambian también su tamaño.

### EJERCICIO 19

- 1) Colocar un punto  $A$  cerca del extremo izquierdo de la pantalla y como a  $1/3$  de la misma medido de abajo hacia arriba.
- 2) Colocar un punto  $B$  cerca del extremo derecho de la pantalla y como a  $1/3$  de la misma medido de abajo hacia arriba.
- 3) Trazar el segmento  $AB$ .
- 4) Colocar un punto  $P$  sobre el segmento  $AB$ .
- 5) Trazar una circunferencia (no muy grande) tangente al segmento  $AB$  en el punto  $P$ . Mover el punto  $P$  para comprobar que la circunferencia se mueve siempre tangencialmente.
- 6) Trazar el segmento  $AP$ . Darle formato (de color verde fuerte, punteado y poco más grueso) para que se distinga del segmento  $PB$ . Para que el punto  $P$  no se pierda a la vista, cambiarle el tamaño dando clic en **modificar apariencia** que se encuentra en el primer icono de derecha a izquierda y en la primera línea. Conviene poner el rojo relleno más grande.
- 7) En el tercer icono de derecha a izquierda, seleccionar **distancia y longitud**. Dar clic en el segmento  $AP$  para que aparezca su longitud. Mover el punto  $P$  para verificar que esa longitud varía conforme cambia el segmento  $AP$ . Editar la longitud del segmento  $AP$  dando doble clic sobre el número y agregando la leyenda: **distancia ap =**. (Ver figura 18).
- 8) Transferir la medida anterior a la circunferencia, para lo cual primero se copia la longitud, después se le señala a Cabri el objeto al que se va a pasar la medida, es este caso a la circunferencia; y finalmente, como la circunferencia no tiene principio ni fin, debe indicársele a partir de qué punto sobre la circunferencia se hará la transferencia.

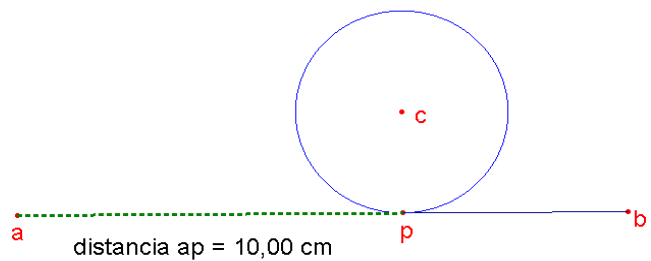


figura 18

En el quinto icono, activar **transferencia de medidas**. Hacer clic sobre la medida del segmento  $AP$  (para que copie dicha medida); luego hacer clic sobre la circunferencia (para que transfiera la medida anterior a la circunferencia); finalmente hacer clic sobre el punto  $P$  (para que la transferencia a la circunferencia se haga a partir del punto  $P$ ). Al punto que aparece sobre la circunferencia llamarle  $Q$ .

Este procedimiento de transferir una medida a una circunferencia a partir de un punto dado se va a emplear en ejercicios posteriores, por lo que se recomienda al estudiante fijarse bien en los pasos que en este inciso 8 se llevaron a cabo. Tomar en cuenta que para transferir una medida a una circunferencia debe especificarse a partir de qué punto de la circunferencia se desea hacer la transferencia de dicha medida. En este ejercicio fue a partir del punto  $P$ .

- 9) En el sexto icono, activar **simetría axial**. Dar clic sobre el punto  $Q$  y luego sobre la perpendicular que sirvió para trazar la circunferencia tangente. Al nuevo punto que aparece sobre la circunferencia llamarle  $R$ . Ocultar la perpendicular y el punto  $Q$ .
- 10) Trazar una semirrecta que inicie en el punto  $R$  y pase por el centro de la circunferencia. Marcar el nuevo punto de intersección de dicha semirrecta con la circunferencia y llamarle  $T$ . En caso de que quede casi encimado con otro punto, mover el punto  $P$  hasta que quede a distancia cómoda.
- 11) Trazar el segmento  $RT$  y ocultar la semirrecta (no el segmento  $RT$ ) que pasa por esos dos puntos.
- 12) Trazar una perpendicular al segmento  $RT$  que pase por el centro de la circunferencia. Marcar los dos puntos de intersección de dicha recta perpendicular con la circunferencia y llamarlos  $U$  y  $V$ .
- 13) Trazar el segmento  $UV$  y ocultar la recta perpendicular (no el segmento) sobre el que pasa.
- 14) Ocultar la longitud del segmento  $AP$  y todos los puntos marcados sobre la circunferencia, excepto el punto  $P$ . Debe verse nada más el segmento  $AB$ , el segmento  $AP$ , el punto  $P$ , la circunferencia y dos diámetros perpendiculares.
- 15) Mover el punto  $P$ .

## EJERCICIO 20

- 1) Trazar dos líneas guías  $AB$  y  $CD$ . Darles formato con diferente color a cada una de ellas y además ponerles su longitud.
- 2) Construir un rectángulo que tenga por diagonal a una de las líneas guía (la más larga) y por un lado a la otra línea guía. Darle formato al rectángulo de manera que tengan el mismo el color la línea guía y el lado del mismo tamaño del rectángulo, así como el color de la otra línea guía con el color de la diagonal que coinciden en tamaño.

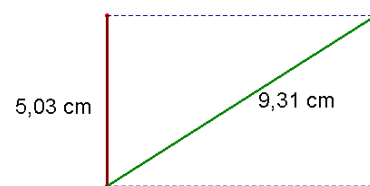
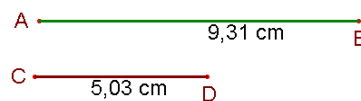


figura 19

EJERCICIO 21

- 1) Construir una línea guía  $AB$ .
- 2) Construir dos circunferencias tangentes entre sí, con ocho rayos cada una, de manera que “giren” cuando la línea guía se haga cambiar de longitud, como si fueran dos rueda dentadas o dos poleas, como lo muestra la figura 20. Para este ejercicio debe recordarse lo que se hizo en el ejercicio 19, en especial en el inciso 8).

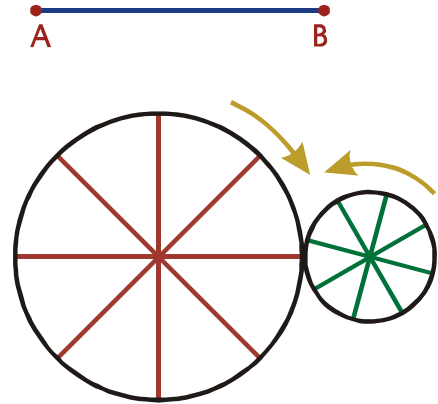


figura 20

EJERCICIO 22

- 1) Construir una línea guía  $AB$ .
- 2) Construir un rectángulo cualquiera que tenga por perímetro la longitud del segmento guía  $AB$ .

Se debe comprobar que la suma de los lados del rectángulo es igual a la longitud de la línea guía activando **Calcular** en el tercer icono de derecha a izquierda. Aparecerá la calculadora que se muestra en la figura 21.

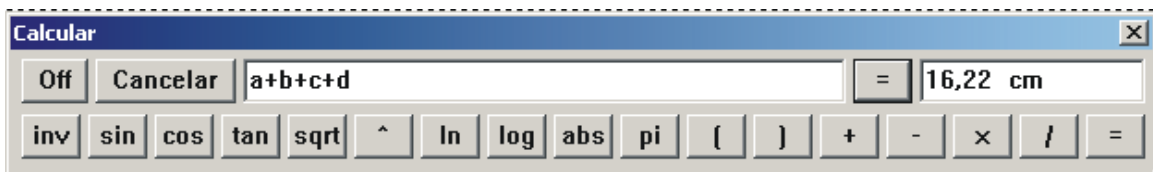


figura 21

Dar clic en el valor numérico de la longitud de uno de los lados y aparecerá la letra  $a$  en la calculadora en virtud de que dicho valor es variable, no constante. Luego teclear  $+$  y continuar así hasta tener los cuatro lados. Dar clic en el signo igual. El resultado que aparece debe arrastrarse al sitio de la pantalla que se desee. Luego debe editarse con un texto que se refiera al perímetro del rectángulo.

La figura 22 es para dar al estudiante una idea de cómo debe presentarse este ejercicio.



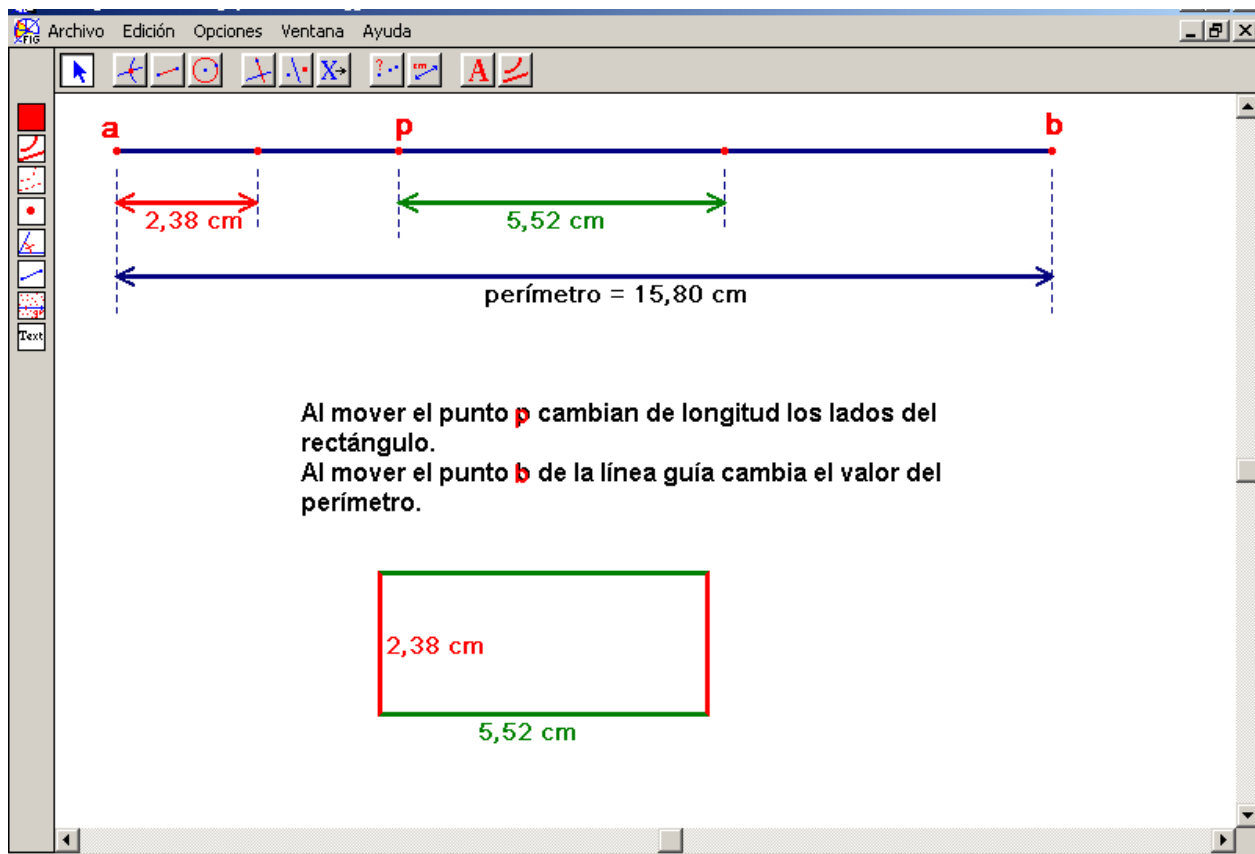


figura 22

## EJERCICIO 23

- 1) Construir una línea guía  $AB$  que solamente pueda cambiar de longitud horizontalmente.
- 2) Construir un rombo cualquiera tal que la suma de las longitudes de sus dos diagonales sea igual a la longitud del segmento guía  $AB$ . Debe estar comprobado con la calculadora de Cabri.

La construcción de este ejercicio tiene mucha semejanza a la del ejercicio 22. Ver figura 23.

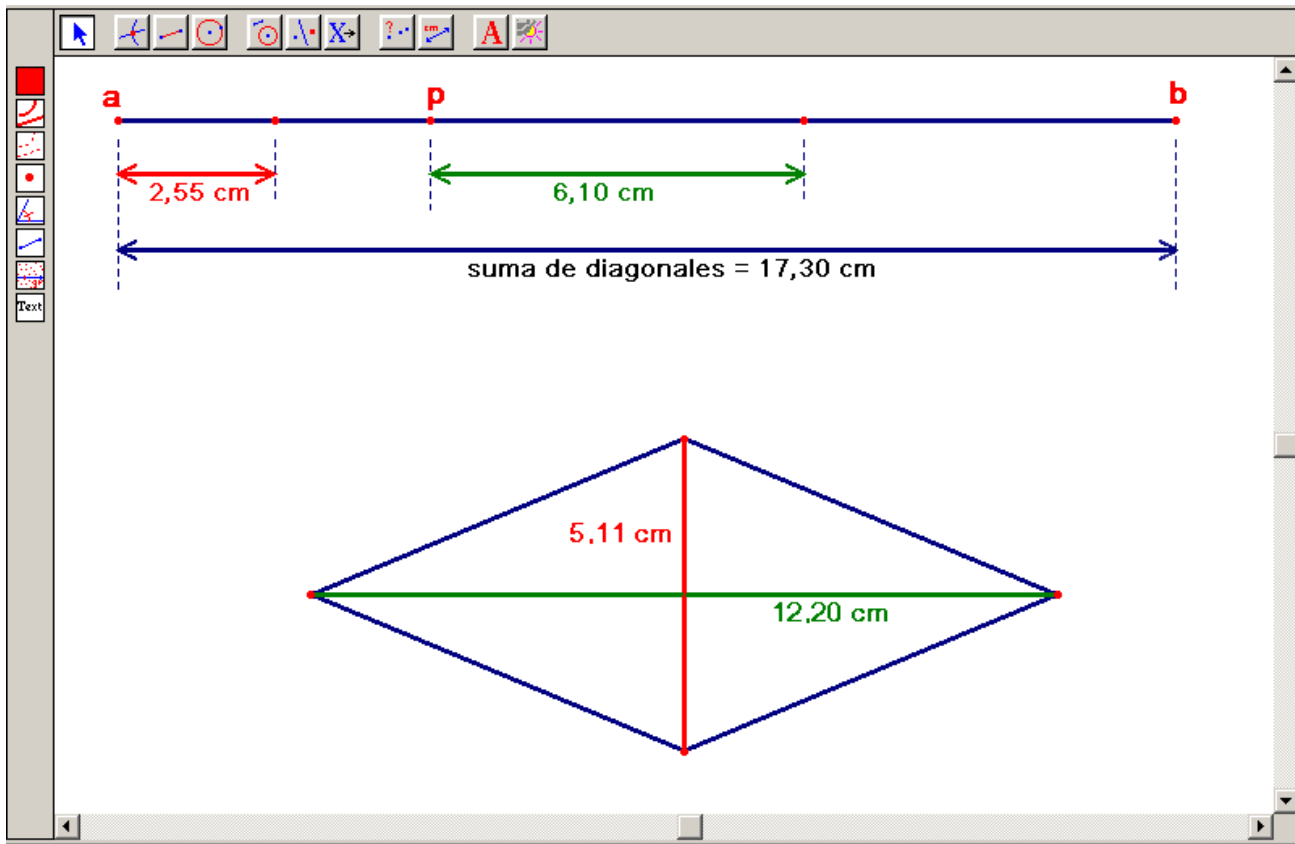


figura 23

## EJERCICIO 24

- 1) Construir una línea guía  $AB$  que solamente pueda cambiar de longitud horizontalmente.
- 2) Construir un rectángulo cualquiera que tenga por área la longitud del segmento guía  $AB$ . Debe estar comprobado con la calculadora de Cabri. Es decir, la longitud de la base por la longitud de la altura debe ser igual a la longitud de la línea guía  $AB$ .

La figura 24 es una guía de cómo puede quedar este ejercicio.

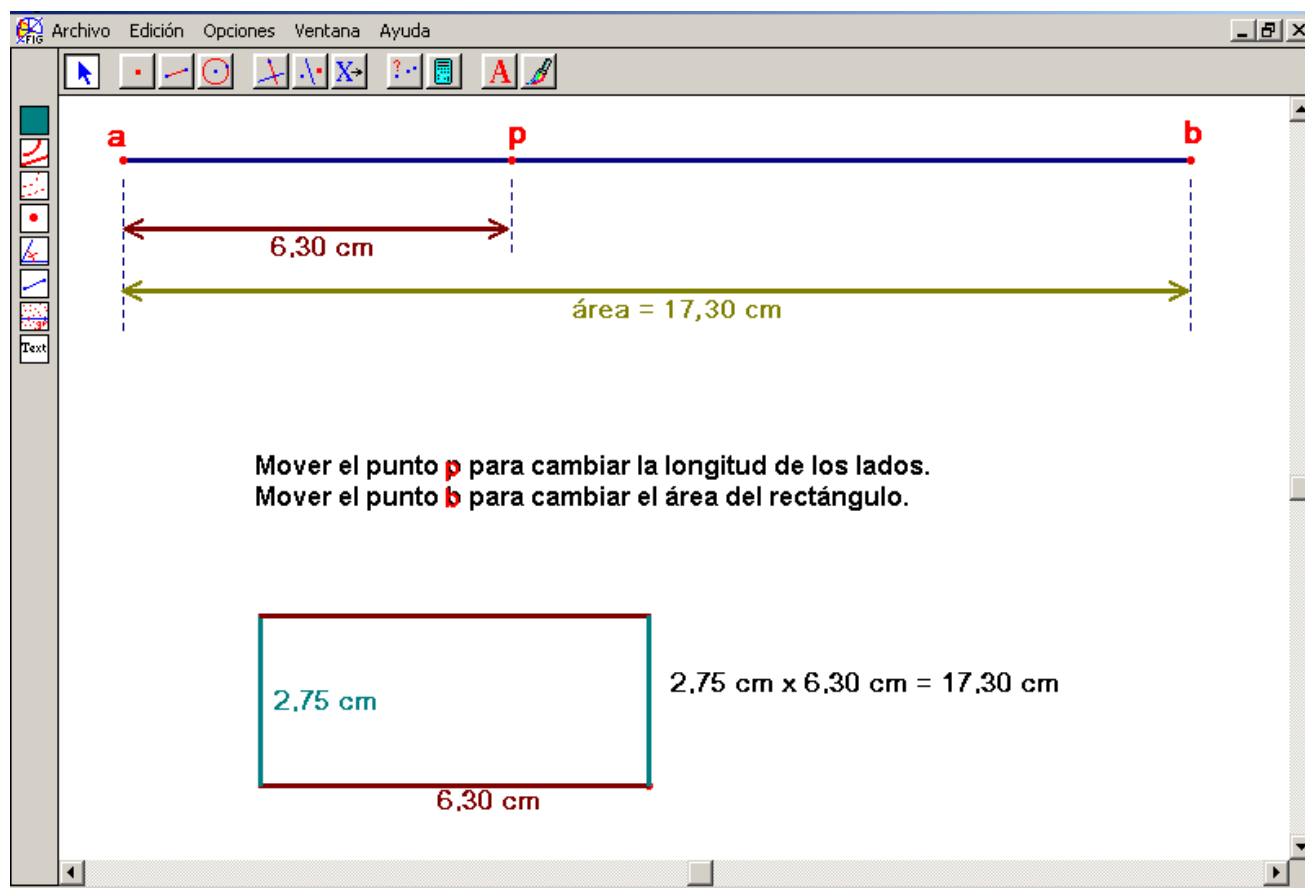


figura 24

## EJERCICIO 25

- 1) Construir una línea guía  $AB$  que solamente pueda cambiar de longitud horizontalmente.
- 2) Construir un triángulo isósceles cualquiera cuyo perímetro sea igual a la longitud de la línea guía. Deben ponerse las longitudes de sus lados para verificar que efectivamente es isósceles. Comprobar con la calculadora de Cabri que la suma de las longitudes de sus tres lados es igual a la longitud de la línea guía  $AB$ .

## EJERCICIO 26

- 1) Construir una línea guía  $AB$  que solamente pueda cambiar de longitud horizontalmente.
- 2) Construir un triángulo equilátero cuya altura sea igual a la longitud de la línea guía. Deben ponerse las longitudes de los tres lados con la herramienta **Distancia y longitud** para poder verificar que son iguales. Asimismo debe ponerse la longitud de la altura para verificar que cumple con la condición del enunciado.

**LUGARES GEOMÉTRICOS**

## EJERCICIO 27

- a) Trazar una semirrecta horizontal en la parte superior de la pantalla. Lllamarle  $A$  al punto inicial que aparece en la semirrecta.
- b) Colocar un punto  $B$  sobre la semirrecta.
- c) Trazar el segmento  $AB$  que una a los dos puntos existentes sobre la semirrecta.
- d) Ocultar la semirrecta. Recordar que este es el procedimiento para construir una línea guía, la cual no debe girar ni el punto  $B$  pasarse a la izquierda del punto  $A$ .
- e) Poner la longitud del segmento  $AB$ .
- f) Poner una recta horizontal aproximadamente a las dos terceras partes de la pantalla, contadas de arriba hacia abajo.
- g) Poner una recta vertical aproximadamente a la mitad de la pantalla.
- h) Localizar el punto  $C$  de intersección de las dos rectas anteriores.
- i) Ocultar las dos rectas horizontal y vertical y los puntos que se hayan generado con ellas, excepto el punto  $C$  de intersección. El procedimiento de los pasos f) al i) es el indicado para ubicar un punto en la pantalla que no pueda moverse de ese lugar. Comprobar que dicho punto  $C$  no puede moverse.
- j) Transferir la longitud del segmento  $AB$  al punto  $C$ . Fijar el punto final en cualquier parte de la pantalla y llamarle  $D$  a dicho punto.
- k) Mover el punto  $D$ . ¿Qué figura describe el punto? Poner la respuesta con un breve comentario. Si el punto  $D$  tuviera tinta y fuera marcando su trayectoria al moverse, a la figura que quedaría dibujada se le llama **el lugar geométrico** del punto  $D$ .
- l) Mover el punto  $B$  de la línea guía. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto  $D$ ? Poner la respuesta con un breve comentario.

## EJERCICIO 28

Las preguntas del ejercicio anterior son muy fáciles de responder, pero no siempre resulta tan sencillo, como podrá verse en los siguientes ejercicios

- Trazar una circunferencia con centro en  $c$  ubicado aproximadamente en el centro de la pantalla y cuyo tamaño abarque casi toda la pantalla, sin salirse ella.
- Colocar un punto  $a$  en cualquier parte de la circunferencia anterior.
- Colocar otros dos puntos  $b$  y  $c$  en cualquier otra parte de la pantalla y afuera de la circunferencia. Ocultar dicha circunferencia.
- Construir (con segmentos) el triángulo  $abc$ .
- Localizar el circuncentro  $P$  del triángulo. Ocultar las mediatrices.
- Mover el punto  $a$  y observar detalladamente el movimiento que hace el circuncentro  $P$  del triángulo a través de la pantalla. ¿Cuál es el lugar geométrico de  $P$ ? Poner la respuesta con un breve comentario.

## EJERCICIO 29

- Trazar una circunferencia con centro en  $c$  ubicado aproximadamente en el centro de la pantalla y cuyo tamaño abarque casi toda la pantalla, sin salirse ella.
- Colocar un punto  $a$  en cualquier parte de la circunferencia anterior.
- Colocar otros dos puntos  $b$  y  $c$  en cualquier otra parte de la pantalla y afuera de la circunferencia. Ocultar dicha circunferencia.
- Construir (con segmentos) el triángulo  $abc$ .
- Localizar el baricentro  $P$  del triángulo. Ocultar las medianas.
- Mover el punto  $a$  y observar detalladamente el movimiento que hace el baricentro  $P$  del triángulo a través de la pantalla. ¿Cuál es el lugar geométrico de  $P$ ? Poner la respuesta con un breve comentario.

## EJERCICIO 30

- Colocar un punto  $c$  aproximadamente en el centro de la pantalla.
- Trazar dos circunferencias concéntricas con centro en  $c$  (ver glosario), aproximadamente una del doble del tamaño de la otra, y una recta  $R_1$  que pase por el centro de ellas.
- Colocar un punto  $P$  sobre la circunferencia mayor, pero que no sea la intersección con la recta  $R_1$ .
- Trazar una recta  $R_2$  que pase por el centro  $c$  de ambas circunferencias y por el punto  $P$ .
- Marcar el punto de intersección más cercano a  $P$  entre la recta  $R_2$  (que pasa por  $P$ ) y la circunferen-

cia menor. Llamarle a dicho punto  $Q$ .

- f) Trazar por el punto  $P$  una perpendicular  $P_p$  a la recta  $R_1$ .
- g) Trazar por el punto  $Q$  una paralela  $P_q$  a la recta  $R_1$ .
- h) Llamarle  $E$  al punto de intersección de las rectas  $P_p$  y  $P_q$ .
- i) Ocultar todo excepto los puntos  $E$  y  $P$ .
- j) Deducir el lugar geométrico del punto  $E$  cuando  $P$  se desliza. Poner la respuesta con un comentario.

### EJERCICIO 31

- a) Crear un segmento  $AB$ .
- b) Colocar dos puntos  $F_1$  y  $F_2$  sobre  $AB$ , de modo que  $AF_1 = BF_2$ . El punto  $F_1$  debe ser el que quede más cercano al extremo  $A$  y el punto  $F_2$  el más cercano a  $B$ . Además, el punto  $F_1$  debe quedar cercano al punto  $A$ . Ocultar todos los trazos auxiliares que hayan requerido para lograr lo anterior.
- c) Trazar los tres segmentos de recta  $AF_1$ ,  $F_1F_2$  y  $F_2B$ .
- d) Colocar un punto  $x$  dependiente del segmento  $F_1F_2$ . Para comprobar que quedó en el segmento  $F_1F_2$  y no en el segmento  $AB$ , mover el punto  $x$  el cual no debe pasarse más a la izquierda de  $F_1$  ni a la derecha de  $F_2$ .
- e) Construir una circunferencia de radio  $Ax$  con centro en  $F_2$  (se requiere hacer transferencia de medidas).
- f) Construir una circunferencia de radio  $Bx$  con centro en  $F_1$ .
- g) Marcar los puntos  $P$  y  $Q$  de intersección de las dos circunferencias anteriores
- h) Ocultar todo, excepto los punto  $P$ ,  $Q$  y  $x$ . Es decir, solamente deben verse en la pantalla los tres puntos mencionados.
- i) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos  $P$  y  $Q$  cuando el punto  $x$  se mueve? Poner la respuesta con un breve comentario.

### EJERCICIO 32

- a) Trazar un segmento  $AB$  horizontal en la parte inferior de la pantalla y que abarque casi toda la longitud de la pantalla.
- b) Colocar un punto  $f$  horizontalmente en el centro de la pantalla, arriba del segmento  $AB$  y como a un dedo de separación.
- c) Colocar un punto  $p$  dependiente del segmento  $AB$ .

- d) Trazar el segmento  $fp$ .
- e) Trazar la mediatriz de  $fp$ .
- f) Trazar una perpendicular al segmento  $AB$  desde el punto  $p$ .
- g) Marcar el punto  $x$  de intersección de la mediatriz del inciso e) y la perpendicular del inciso f).
- h) Ocultar todo, excepto los puntos  $p$  y  $x$ . Es decir, solamente deben verse en la pantalla los dos puntos mencionados.
- i) ¿Cuál es el lugar geométrico del punto  $x$  cuando el punto  $p$  se mueve? Poner la respuesta con un breve comentario.

### EJERCICIO 33

- a) Colocar un punto  $a$  en el centro de la pantalla.
- b) Trazar una circunferencia con centro en el punto  $a$  y radio tal que la circunferencia quede aproximadamente abarcando toda la pantalla, pero sin salirse de ella.
- c) Colocar un punto  $b$  dependiente de la circunferencia en la parte superior izquierda (figura 25).
- d) Trazar una recta que pase por los puntos  $a$  y  $b$ .
- e) Colocar un punto  $c$  adentro y cerca de la circunferencia como se ve en la figura 25.
- f) Trazar el segmento  $bc$ .
- g) Trazar la mediatriz del segmento  $bc$ .
- h) Marcar el punto  $p$  de intersección de la mediatriz anterior con la recta  $ab$ .
- i) Ocultar todo excepto los cuatro puntos.
- j) Mover el punto  $b$ . ¿Cuál es el lugar geométrico que describe el punto  $p$ ? ¿Qué son los puntos  $a$  y  $c$ ? Poner las respuestas con un comentario.

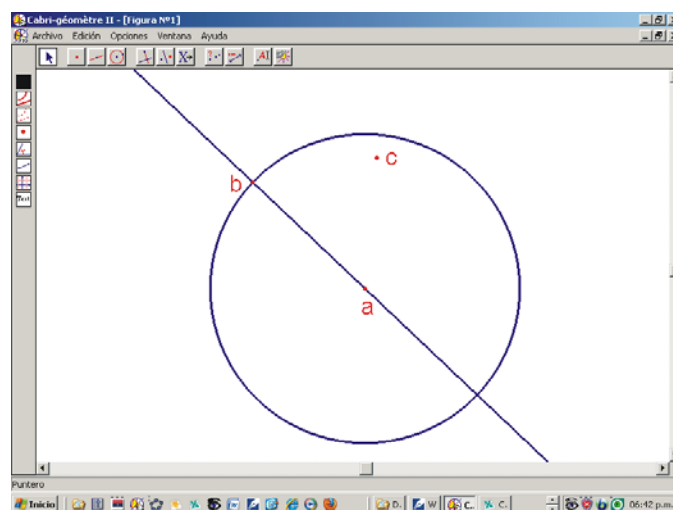


figura 25

## EJERCICIO 34

Si en el ejercicio anterior el punto  $c$  se saca de la circunferencia, ¿Cuál es el lugar geométrico que describe el punto  $p$ ? Poner la respuesta con un comentario.

## EJERCICIOS 35 AL 41

Repetir los ejercicios 28 al 34 utilizando la herramienta **lugar geométrico**, quinto icono de izquierda a derecha, conforme se indica a continuación.

Para producir el lugar geométrico se requiere dar clic en dos puntos: uno es el *punto independiente* y el otro es el *punto dependiente*. El punto *independiente* es el que se mueve arbitrariamente y que provoca que el otro se mueva. El punto *dependiente* es del que interesa su trayectoria (su lugar geométrico), es el que se mueve a consecuencia de haber movido el independiente.

En el quinto icono de izquierda a derecha localizar **lugar geométrico** y activarlo. Dar clic en el punto del que se desea saber su trayectoria, es decir, su lugar geométrico (*punto dependiente*) y después (es necesario que sea en ese orden) dar clic en el punto “respecto del cual se produce el lugar geométrico”, es decir en el *punto independiente*.

**GRÁFICAS CON LUGAR GEOMÉTRICO**

## EJERCICIO 42

Graficar la función  $y = \frac{x^2}{4}$

**solución:**

- Seleccionar **mostrar ejes** en el último icono de la barra de herramientas.
- Colocar un punto sobre el eje  $x$  y llamarlo  $x$ .
- Seleccionar **ecuaciones y coordenadas** en el tercer icono de derecha a izquierda de la barra de herramientas y obtener las coordenadas del punto  $x$ .
- Activar la herramienta **calcular**.
- En la calculadora que aparece en la parte inferior de la pantalla escribir la expresión que se desea



graficar, en este caso  $\frac{x^2}{4} =$ , de la siguiente forma:

- i) Con el ratón dar clic en la abscisa del punto  $x$  (para copiar el valor actual de  $x$ ). En la pantalla de la calculadora aparecerá la letra  $a$  en vez del número copiado;
  - ii) El valor de  $x$  copiado a la calculadora se eleva al cuadrado, se divide entre 4 y finalmente se teclea el signo  $=$ . Para elevar al cuadrado se teclea  $x^2$ , la cual se puede obtener en código ASCII tecleando ALT 94.
- f) Dar clic en el resultado mostrado en la calculadora y sin soltar sacarlo hacia cualquier área de trabajo de la pantalla. Cerrar la calculadora.
  - g) Con **transferencia de medidas**, transferir el resultado anterior al eje  $y$ . Llamar al punto obtenido  $f(x)$ . En caso de que no aparezca en la pantalla, mover el origen de las coordenadas dando clic en él y sin soltarlo, arrastrarlo hacia abajo lo necesario para visualizar el punto  $f(x)$ .
  - h) Construir una perpendicular al eje  $y$  que pase por  $f(x)$  y otra perpendicular al eje  $x$  que pase por el punto  $x$ . Darles formato con línea punteada y un color ligeramente claro. Colocar el punto de intersección de las anteriores perpendiculares y llamarlo  $a$ .
  - i) Ocultar las coordenadas del punto  $x$ .
  - j) Activando **Modificar apariencia**, darle un tamaño más grande a los punto  $x$ ,  $f(x)$  y  $a$ .
  - k) Activar **lugar geométrico** del punto  $a$  cuando el punto  $x$  se mueve.
  - l) Centrar la gráfica en la pantalla como se muestras en la figura 27.

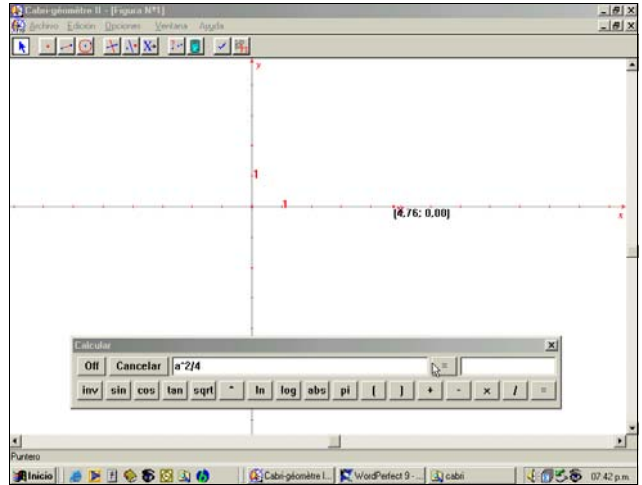


figura 26

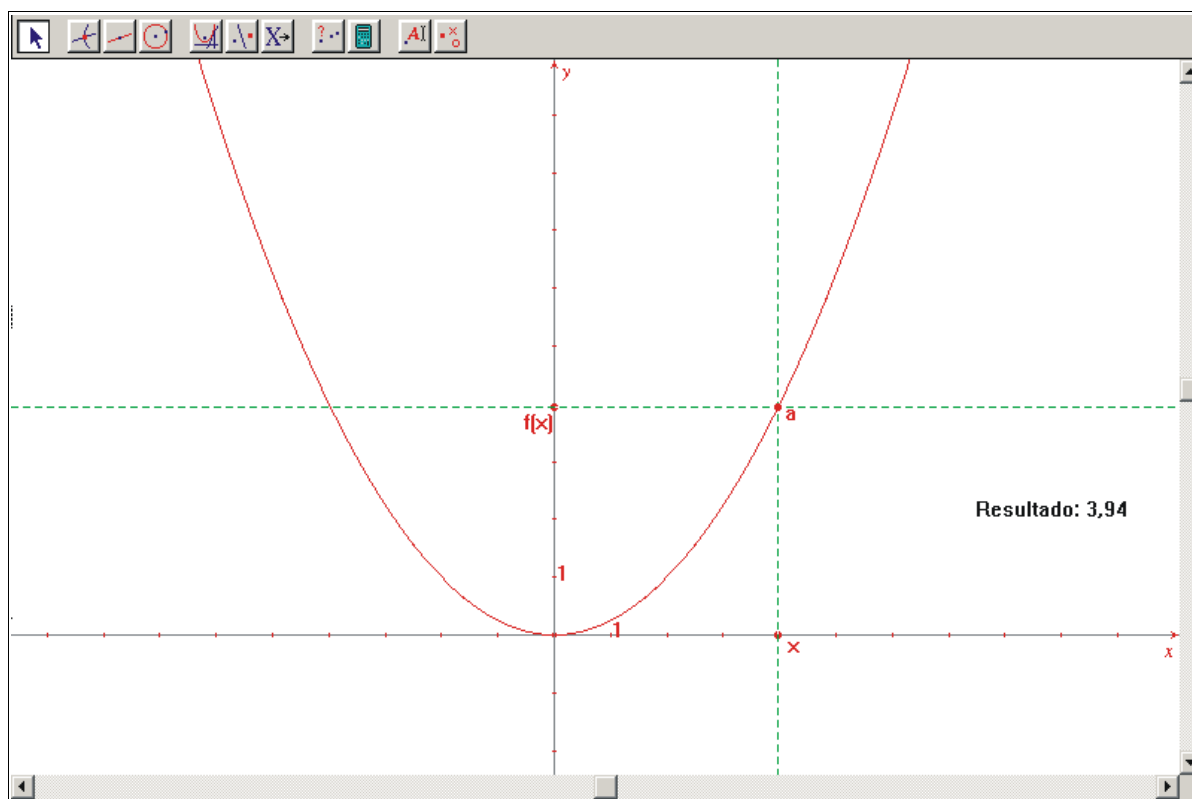


figura 27

EJERCICIO 43: Graficar la función  $y = 4x^2 - 3$

EJERCICIO 44: Graficar la función  $y = x^3 - x$

EJERCICIO 45: Trazar una recta tangente a una elipse dada, desde un punto  $P$  exterior a la elipse.

- a) Utilizando el método de alguno de los ejercicios anteriores y empleando **lugar geométrico**, generar una elipse. Ocultar todos los trazos auxiliares dejando visibles solamente la elipse y los focos, como lo muestra la figura 28. La línea guía no es indispensable.

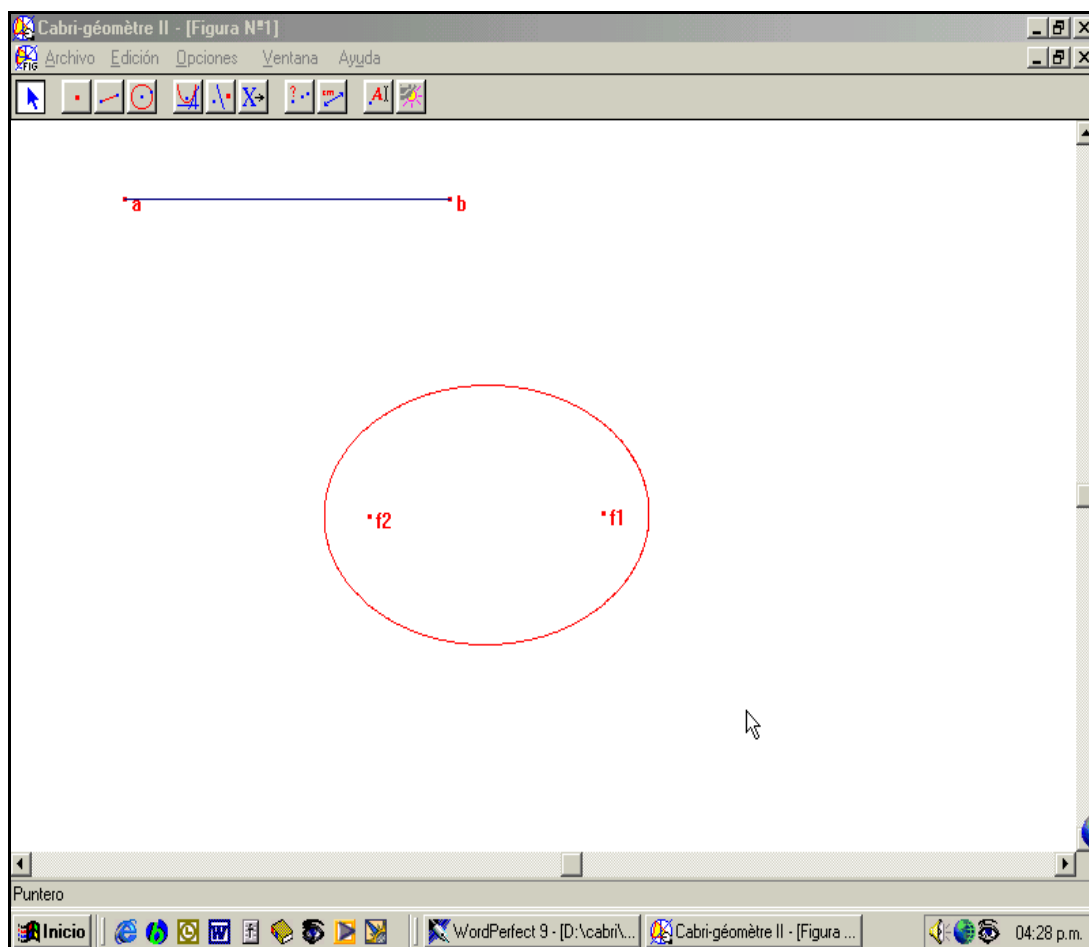


figura 28

- b) El lugar geométrico que aparece en línea roja no tiene las mismas propiedades que los demás trazos que se pueden generar con Cabri. Por ejemplo, si se traza una circunferencia que corte a la elipse, no se pueden marcar los puntos de intersección. Probarlo. Entonces, cuando se van a requerir dichas propiedades sobre un lugar geométrico, debe reconstruirse empleando la herramienta **cónica**, situada en el 4º icono de izquierda a derecha, con la que se requieren cinco puntos para definir una cónica. De tal manera que debe activarse la herramienta **cónica** y luego marcar cinco puntos sobre el lugar geométrico.
- c) Ocultar el lugar geométrico y los cinco puntos anteriores.
- d) Colocar un punto  $P$  en la pantalla, exterior a la elipse.

- e) Trazar una recta que pase por los focos  $f_1$  y  $f_2$ .
- f) Marcar los puntos  $V_1$  y  $V_2$  de intersección entre la recta anterior y la elipse. Recordar que esos puntos son los *vértices* y que la longitud del segmento  $V_1V_2$  se llama *eje mayor*.
- g) Marcar el segmento correspondiente al eje mayor y ocultar la recta del inciso e).
- h) Con **compás**, transferir la medida del eje mayor al foco  $f_1$ . Lllamarle  $C_1$  a dicha circunferencia.
- i) Trazar una circunferencia con centro en el punto  $P$  y radio  $Pf_2$ . Lllamarle  $C_2$  a dicha circunferencia.
- j) Marcar los puntos  $Q$  y  $R$  de intersección entre ambas circunferencias. Ocultar ambas circunferencias
- k) Con la herramienta **mediatriz**, trazar la mediatriz del segmento  $Qf_2$ . Lllamarle  $T_1$  a dicha mediatriz. Si el segmento  $Qf_2$ , no está trazado, no es necesario hacerlo, basta activar **mediatriz** y luego dar clic en ambos puntos extremos del segmento. Ocultar todos los trazos auxiliares hasta que quede en la pantalla exclusivamente una construcción como lo muestra la figura 29.
- l) La mediatriz anterior es la tangente a la elipse pasando por el punto exterior  $P$ . Marcar el punto de tangencia  $s$  entre la mediatriz anterior y la elipse. Darle formato a la construcción, resaltando la elipse y la tangente por ser los objetos principales.
- m) Probar la afirmación hecha en el inciso anterior, es decir que la mediatriz del inciso k) es tangente a la elipse, moviendo el punto exterior  $P$ , moviendo el foco  $f_2$  y cambiando la longitud del segmento guía  $ab$ .

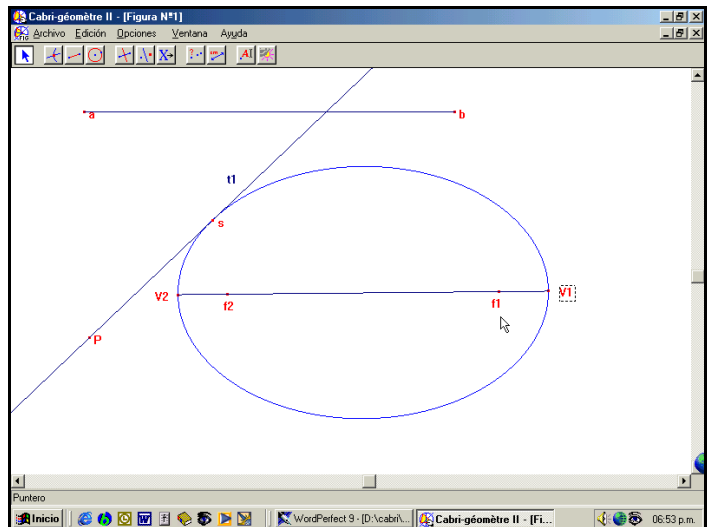


figura 29

## EJERCICIO 46

Probar en la construcción obtenida en el ejercicio anterior que la *normal* en el punto  $s$  es la bisectriz del ángulo  $f_2sf_1$ . En matemáticas, *normal* significa perpendicular, en este caso se refiere a la perpendicular a la tangente en el punto  $s$ . Para que la prueba sea válida, debe hacerse la prueba moviendo el punto exterior  $P$ ; moviendo el foco  $f_2$  para cambiar la forma de la elipse. La figura 30 da una idea del ejercicio concluido.

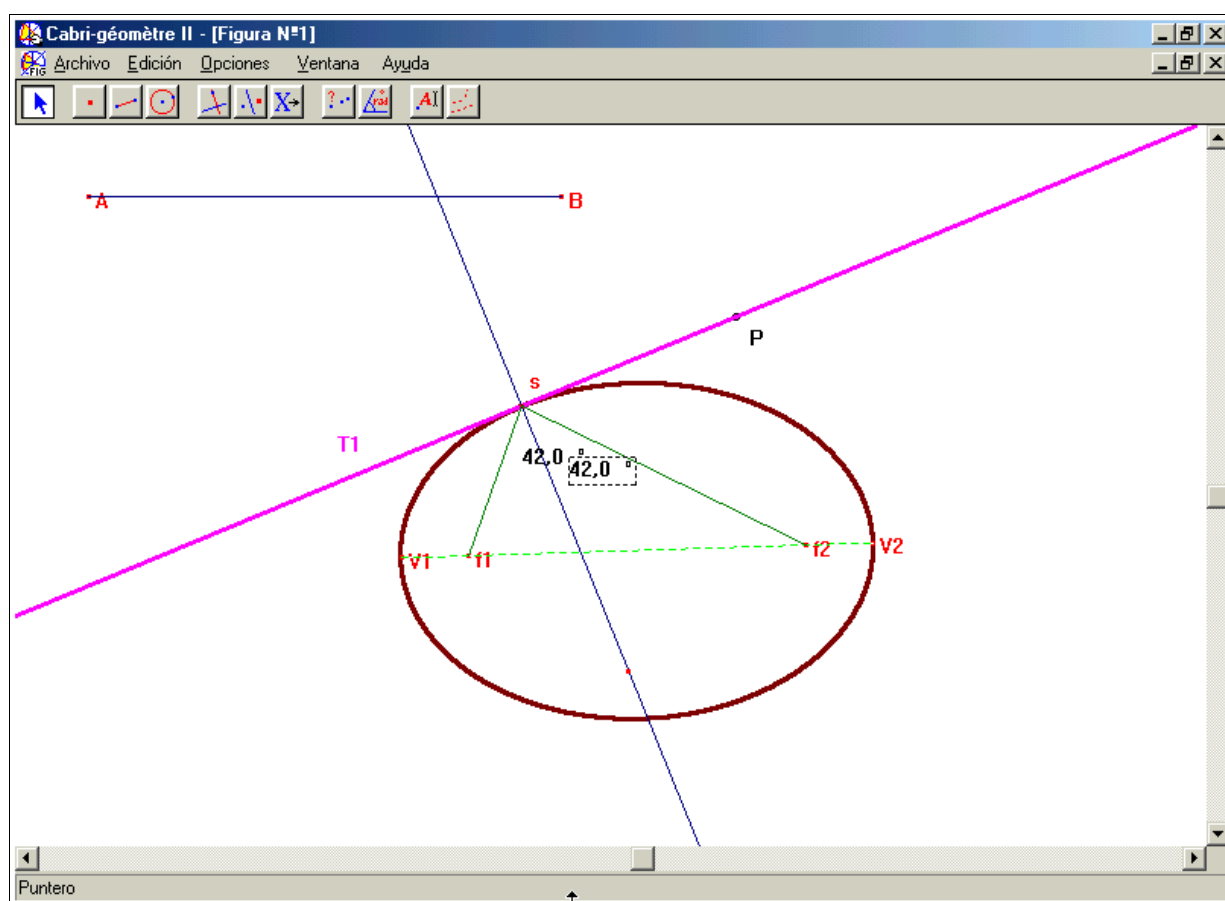


figura 30

## MACROS

Nota: En todos los ejercicios de **Macros** es indispensable **poner un comentario** señalando el nombre de la macro, así como las instrucciones básicas (en dónde darle clic) para que funcione dicha macro. Si falta lo anterior es equivalente a no haber hecho el ejercicio.

### EJERCICIO 47

Cuando una construcción está compuesta de varios pasos que se repiten varias veces, para no repetir cada vez el mismo conjunto de pasos, se crea una *macro*. Una macro es entonces una especie de archivo que guarda la computadora con la que repite la misma secuencia cada vez que debe repetir la misma tarea.

El ejercicio 47 consiste en hacer una **macro** para construir un rectángulo a partir de un segmento dado, cuya base sea el segmento dado y además con el doble de longitud de la altura. Se empleará dicha macro para generar un caracol, como lo muestra la figura 31.

No es necesario que este ejercicio tenga el mismo número de rectángulo que los mostrados en la figura 31, sino que al dar clic en algún segmento (base de un rectángulo), se genere automáticamente el siguiente rectángulo del caracol con una altura igual a la mitad de longitud que la base.

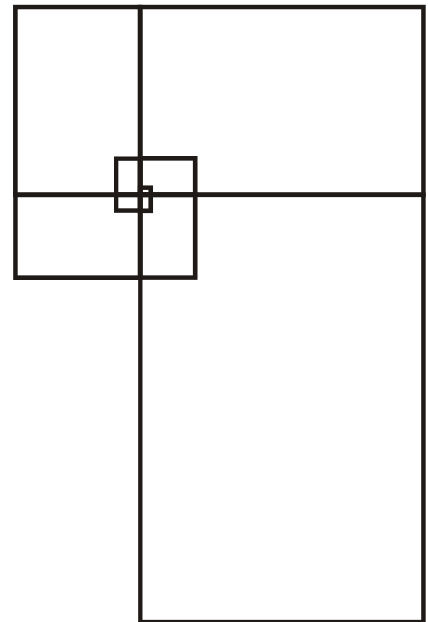


figura 31

**NOTA IMPORTANTÍSIMA:** En una macro se conservan el orden y el sentido en el que se realizaron las construcciones originales, por lo que debe tenerse mucho cuidado en que dichas construcciones tengan el orden y sentido adecuados. Muchas veces un ejercicio resulta al revés de como se desea porque se construyó en un orden o sentido no apropiado. Por ejemplo, si al intentar hacer el caracol de la figura 31, los rectángulos generados por la macro, en vez de aparecer hacia afuera, aparecen hacia adentro, significa que los rectángulos se crearon en sentido inverso. Esto quiere decir que en vez de construirse alguna recta de derecha a izquierda se hizo de izquierda a derecha (o viceversa), o bien, en vez de construirse de arriba

hacia abajo se hizo de abajo hacia arriba ( o viceversa). En casos así debe entonces volverse a construir la macro e invertir el orden y sentido en el que se hicieron los trazos.

### Solución:

- Construir un segmento  $AB$  horizontal, de izquierda a derecha, en la parte inferior de la pantalla, de tamaño regular. Para que el segmento resulte horizontal debe oprimirse primero la tecla **SHIFT** y sin soltarla realizar el trazo.
- Trazar dos perpendiculares al segmento  $AB$  , una  $r_1$  que pase por el punto  $A$  y la otra  $r_2$  por el punto  $B$  .
- Marcar el punto medio  $M$  del segmento  $AB$  .
- Trazar una circunferencia con centro en el punto  $A$  y de radio  $AM$  .
- Marcar el punto de intersección  $C$  de la circunferencia y la recta  $r_1$  .
- Trazar una paralela  $r_3$  al segmento  $AB$  que pase por el punto  $C$  .
- Marcar el punto  $D$  de intersección entre las rectas  $r_2$  y  $r_3$  .
- Con la herramienta **polígono**, trazar el polígono  $BACD$  en ese orden (concluir de nuevo en el punto  $B$  ).
- Ocultar todos los puntos, excepto el  $A$  y el  $B$ , y todos los trazos auxiliares, para que quede en pantalla exclusivamente el rectángulo con los vértices  $A$  y  $B$ .
- En el icono de **macros**, séptimo de izquierda a derecha, activar **objetos iniciales** (ver figura 32). y a continuación seleccionar el segmento inicial  $AB$  , dando clic allí. Recordar que sobre el segmento  $AB$  está encimado el polígono  $BACD$ .
- En el icono de **macros**, séptimo de izquierda a derecha, activar **objetos finales** . y a continuación seleccionar el polígono, dando clic allí. Procurar seleccionar el polígono por alguno de sus lados verticales para evitar la confusión que puede presentarse sobre el lado  $AB$  al haber dos objetos al mismo tiempo allí.
- En el icono de **macros**, activar **definir macro** . En el cuadro de diálogo **nombre de la construcción** (ver figura 33), ponerle un nombre a la macro que se acaba de generar, por ejemplo **rectángulo** o cualquier otro.

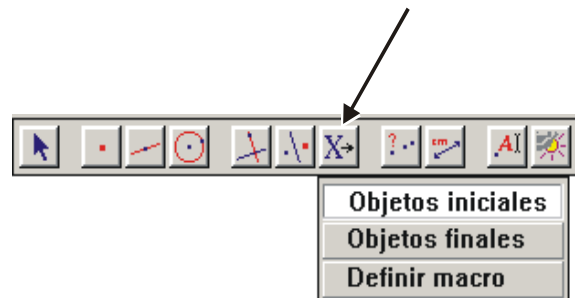


figura 32

A veces se requiere que aparezca alguna pequeña ayuda sobre el uso correcto de alguna macro, cuando ésta se activa para su utilización. Si se desea que en la barra de estado aparezca dicha ayuda, escribirla en el cuadro de diálogo **ayuda para esta macro**, por ejemplo, escribir (sin las comillas): “Dar clic en el lado del rectángulo donde se desea generar este rectángulo nuevo”. Para que aparezca esta ayuda en la parte inferior de la pantalla, como lo muestra la figura 34, una vez activada la macro debe darse clic en el menú **ayuda**.

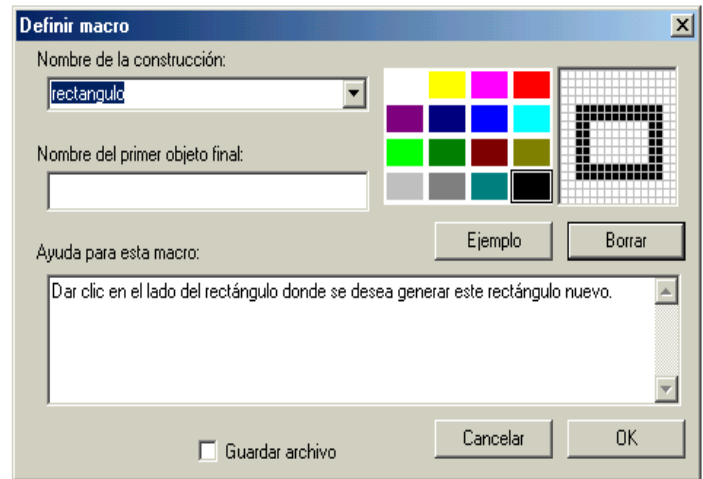


figura 33

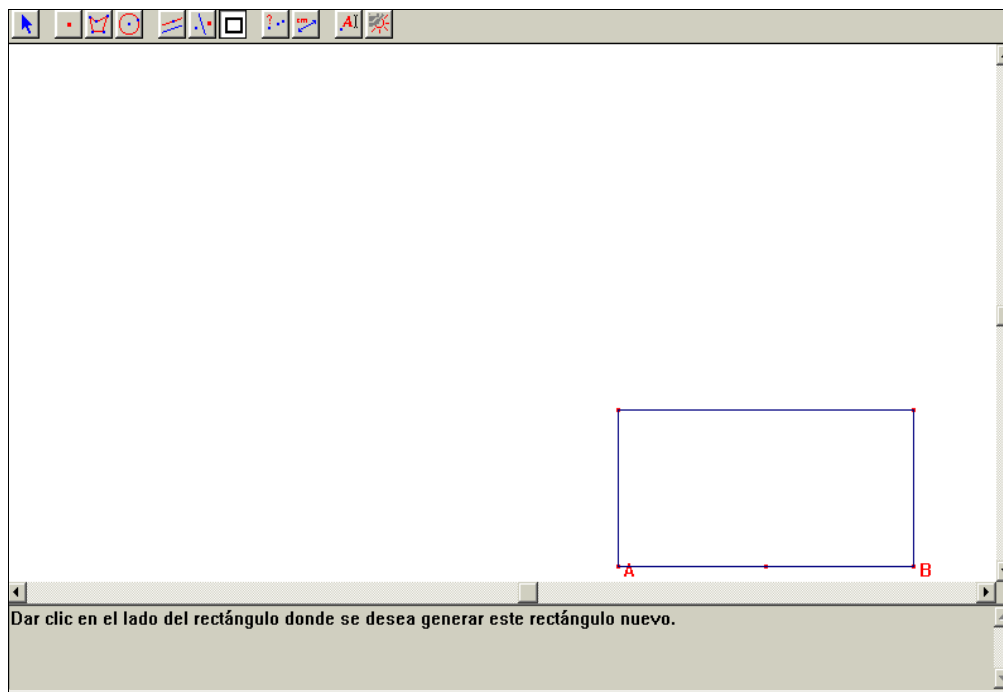


figura 34



Igualmente se puede elaborar un icono representativo de la macro en el cuadro superior derecho (ver figura 35). Si se activa la opción **guardar archivo**, la macro quedará archivada y podrá ser utilizada en cualquier sesión; en caso de que no se archive, se perderá al salir del programa Cabri o al apagar la computadora. Si se desea utilizar un icono ya creado por Cabri, dar clic en **Ejemplo**.

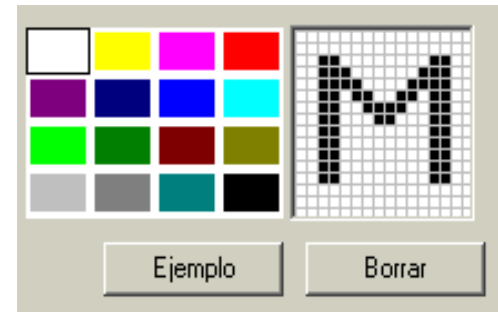


figura 35

- l) Activar la macro creada en el icono de **macros**, séptimo de izquierda a derecha, en donde aparezca el nombre dado a la macro generada.
- m) Generar rectángulos dando clic en cualquier segmento (objeto inicial); pueden ser los mismos lados del rectángulo original.
- n) Para comprobar la **NOTA IMPORTANTÍSIMA** de la página 30, trácense dos segmentos horizontales, uno de izquierda a derecha y el otro de derecha a izquierda y aplíquese la macro anterior a cada uno de estos segmentos. El rectángulo aparecerá en uno de estos segmentos por encima de él y en el otro por debajo, debido al orden y sentido en que se generó la construcción.

## EJERCICIO 48

Construir, creando una macro, un cuadrado central cuyos lados tengan de longitud **1** y sobre cada uno de sus lados colocar otro cuadrado, centrado, hacia afuera (no hacia adentro) con lados iguales a la mitad de la longitud **1** del cuadrado sobre el que se generó este nuevo cuadrado, así sucesivamente, como lo muestra la figura 36. Sugerencia: Utilizar la herramienta **polígono**, para que el objeto final sea todo el cuadrado, no un segmento. Recordar que el sentido en el que se genera la construcción es importante, por lo que si al aplicar la macro los cuadrados se generan hacia adentro en vez de hacia afuera es que se hizo en sentido contrario.

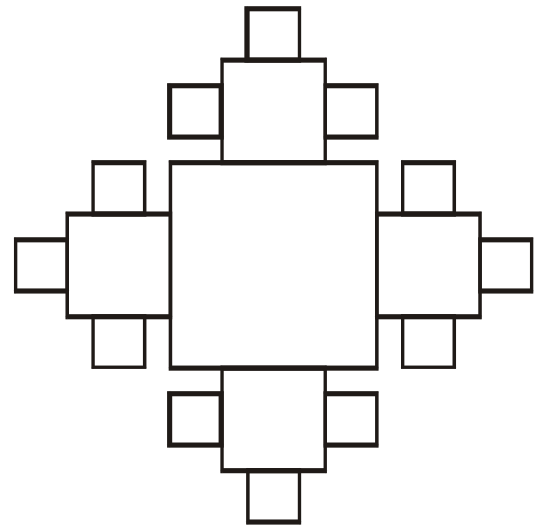


figura 36

## EJERCICIO 49

Con una macro, construir un fractal a partir de la figura madre mostrada en la figura 37, tal que los segmentos  $ac$  y  $ad$  sean  $7/10$  del segmento  $ab$ , y que el ángulo  $\theta$  sea variable.

**solución:**

- Construir el segmento  $ba$  de abajo hacia arriba. Recordar que el sentido en el que se genera la construcción es importante, por lo que si se construye de arriba hacia abajo, al aplicar la macro saldrán figuras invertidas.
- Con **distancia y longitud**, 9° icono de izquierda a derecha, marcar la longitud de dicho segmento  $ba$ .
- Con la calculadora (tercer icono de derecha a izquierda, activando **calcular**), multiplicar la longitud del segmento  $ba$  por  $0.7$ , para lo cual debe darse clic en la longitud del segmento  $ba$  (aparece la letra  $a$  en la pantalla de la calculadora), teclearse el símbolo de multiplicación  $\times$ , teclear  $0.7$  y finalmente el signo  $=$ . Arrastrar el resultado hacia algún sitio de la pantalla, afuera de la calculadora. Cerrar la calculadora.
- Con **transferencia de medidas**, 5° icono de izquierda a derecha, transferir el resultado obtenido en el paso anterior al punto  $a$  y fijar el punto  $T$  de transferencia cerca del segmento  $ba$ .
- Trazar una circunferencia con centro en el punto  $a$  y radio  $aT$ .
- Marcar el punto  $D$  de intersección entre la circunferencia y el segmento  $ab$ .
- En el 2° icono de derecha a izquierda, activar **edición numérica** y dar clic en la parte superior derecha de la pantalla. Teclear adentro el valor  $2,650$  (con coma entre el 2 y el 6, no con punto decimal).
- Marcar la longitud del perímetro de la circunferencia con **distancia y longitud**.
- Con la calculadora (tercer icono de derecha a izquierda, activando **calcular**), dar clic en la medida del perímetro de la circunferencia y multiplicarlo por el número mostrado por la edición numérica generado en el inciso g). El resultado arrastrarlo hacia afuera de la calculadora a cualquier parte de la pantalla (de preferencia en algún extremo). Cerrar la calculadora.
- Con **transferencia de medias**, transferir el valor obtenido en el inciso anterior a la circunferencia a partir del punto  $D$ , para lo cual debe darse clic primero en el valor numérico que se desea transferir, luego clic en la circunferencia y finalmente clic en el punto  $D$ . Llamarle  $K$  al punto resultante.

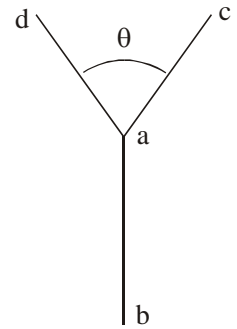


figura 37

- k) Con **simetría axial**, obtener el punto simétrico del punto ***K***, respecto del segmento ***ab***, y llamarle ***J***. Para eso dar clic primero en el punto ***K*** y después en el segmento ***ab***.
- l) Trazar los segmentos ***aK*** y ***aJ*** en ese sentido, es decir comenzando en el centro de la circunferencia. Invertir el sentido traerá problemas al final.
- m) Ocultar los puntos ***D*** y ***T***, los resultados y trazos auxiliares, de manera que solamente queden visibles los segmentos ***ab***, ***aK*** y ***aJ***, los puntos ***a***, ***b***, ***K*** y ***J*** y el valor 2.650 de la edición numérica. Borrar (no ocultar) ahora las etiquetas ***K*** y ***J***, pero no los puntos. Debe tenerse en la pantalla una construcción como la mostrada en la figura 38.

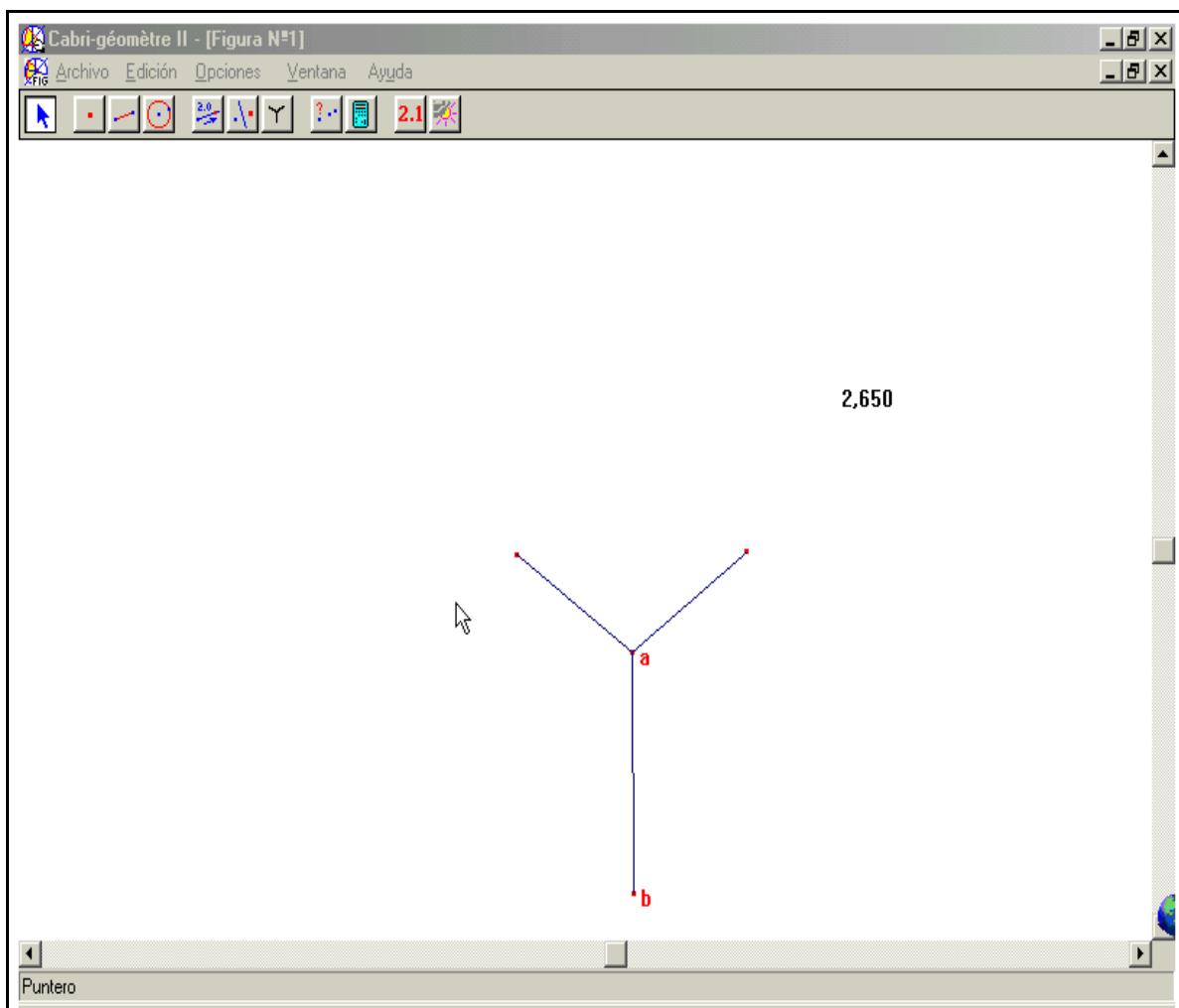


figura 38

n) Antes de crear la macro, comprobar que la figura madre ha quedado bien construida. Mover el punto *a* o el *b* para verificar que cambia de tamaño. Luego dar doble clic sobre el valor 2,650 de la edición numérica y colocar el cursor inmediatamente a la derecha del dígito que se desee hacer variar. Se recomienda ponerlo a la derecha del cero para que el avance sea gradual. Dar clic en el botón superior (con el que tiene la flecha apuntando hacia arriba ▲, ver figura 39), ya sea de vez en vez o sin soltar para ver el movimiento del ángulo.



figura 39

ñ) Crear una macro, seleccionando como objetos iniciales el segmento *ba* y el valor de 2,650 de la edición numérica. Como objetos finales a los dos segmentos *aK* y *aJ*. Ponerle nombre a la macro y se recomienda crear un icono, por ejemplo una Y. o) Una vez creada la macro, activarla. Como los objetos iniciales son dos, debe darse clic en ambos para que genere la figura cada vez, es decir, debe darse clic sobre el segmento *aJ* y después sobre el valor 2,650. Continuar con el proceso hasta donde se desee. Si en un momento dado las Y que se generan aparecen ya muy pequeñas en la pantalla, conviene agrandarlas haciendo más grande el segmento *ab*.

p) Para iniciar la dinámica de la macro en forma vistosa, dar doble clic sobre **edición numérica** y ajustar ese valor a 1,000. Dejar el cursor a la derecha del tercer cero como lo muestra la figura 40. Activar **animación**. Regresar a edición numérica y dar doble clic sobre el tercer cero.



figura 40

## EJERCICIO 50

Inventar una macro que no sea la repetición de una misma figura geométrica, como triángulos, ni cuadrados, ni rectángulos, etc. Por ejemplo, la figura 41 no se acepta.

Poner un comentario para indicar el nombre de la macro y para señalar en dónde debe darse clic y qué va a generar.

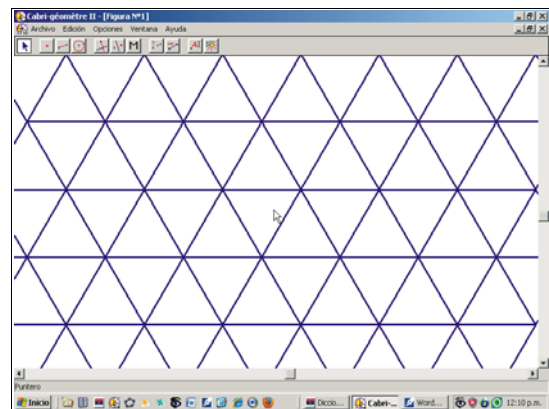


figura 41

## MÁXIMOS Y MÍNIMOS

### EJERCICIO 51

Construir un rectángulo ***DBFE*** de área máxima inscrito a un triángulo rectángulo (figura 42).

**solución:**

- Construir un segmento ***AB*** de tamaño regular en la parte inferior de la pantalla..
- Trazar una perpendicular ***r*<sub>1</sub>** al segmento ***AB*** que pase por el punto ***B***.
- Colocar un punto ***C*** sobre la recta ***r*<sub>1</sub>**.
- Construir el triángulo rectángulo ***ABC***.
- Colocar un punto ***D*** sobre el segmento ***AB***.
- Trazar una perpendicular ***r*<sub>2</sub>** al segmento ***AB*** que pase por el punto ***D***.
- Marcar el punto ***E*** de intersección entre la recta ***r*<sub>2</sub>** y el segmento ***AC***.
- Trazar una paralela ***r*<sub>3</sub>** al segmento ***AB*** que pase por el punto ***E***.
- Marcar el punto de ***F*** intersección entre la recta ***r*<sub>3</sub>** y el segmento ***BC***.
- Con la herramienta **polígono** (tercera, de izquierda a derecha), trazar el rectángulo ***BDEF***.
- Con la herramienta **área** (tercero de derecha a izquierda), marcar el área del rectángulo ***BDEF***.
- Con **transferencia de medidas**, transferir la medida del área del rectángulo ***BDEF*** al punto ***D***. Fijar el punto final ***G*** en cualquier parte de la pantalla.
- Trazar una circunferencia con centro en ***D*** y que pase por el punto ***G***.
- Marcar el punto ***H*** de intersección entre la recta ***r*<sub>2</sub>** y la circunferencia anterior.
- Ocultar las rectas ***r*<sub>1</sub>**, ***r*<sub>2</sub>**, ***r*<sub>3</sub>**, la circunferencia y el punto ***G***.
- Con la herramienta **lugar geométrico**, marcar el lugar geométrico del punto ***H*** cuando el punto ***D*** se mueve.

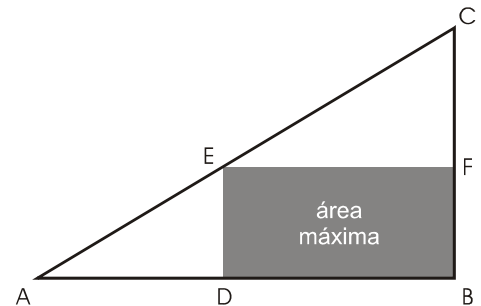


figura 42

q) Obsérvese que la parábola que aparece al aplicar el inciso anterior es la representación geométrica de todas las áreas que se obtienen con los diferentes rectángulos  $BDEF$  inscritos al triángulo rectángulo  $ABC$ . Para comprobarlo trázese el segmento  $DH$  y póngase su longitud. Es la misma que la del área del rectángulo.

El rectángulo de área máxima pedido se obtiene moviendo el punto  $D$  hasta que el punto  $H$  alcanza el vértice de la parábola (porque allí está el máximo). Moviéndola cualquiera de los puntos  $A$ ,  $B$  o  $C$  se obtienen triángulos rectángulos de diferentes medidas.

## EJERCICIO 52

De una lámina cuadrada se desea construir una caja sin tapa (figura 43). Con un procedimiento similar al del ejercicio anterior, hacer una construcción que simule la lámina vista por arriba y la caja en perspectiva, con algún punto que al moverlo haga cambiar las dimensiones de dicha caja hasta que se obtenga el volumen máximo.

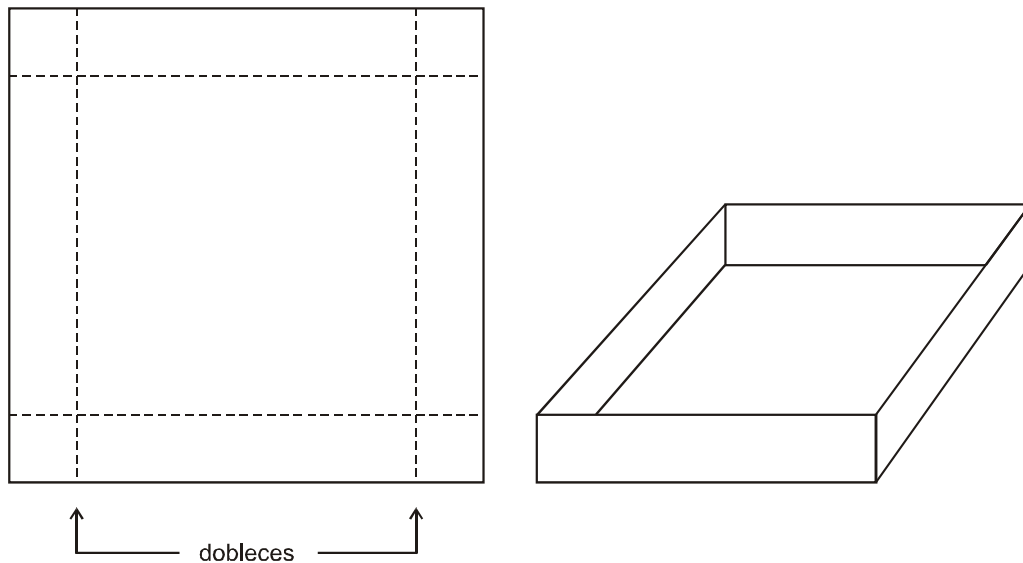


figura 43

## EJERCICIO 53

Con un rollo de alamburada de longitud  $l$  se desea cercar terreno un rectangular por sus cuatro lados de manera que abarque el área máxima. Hacer una construcción en la que una línea guía sea la longitud  $l$  y donde se muestre dicha área máxima. Ver figura 44.

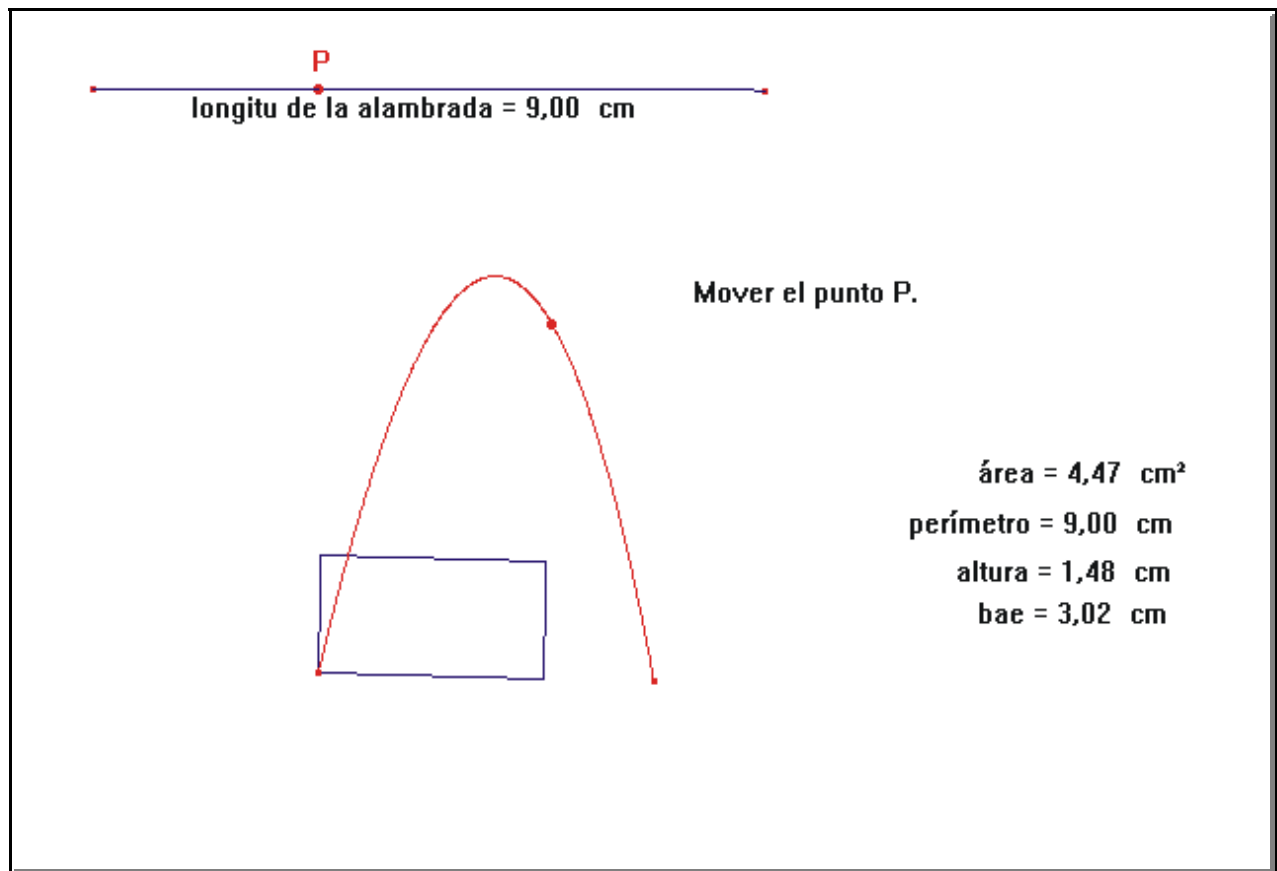


figura 44

## EJERCICIO 54

Con un rollo de alambrada de longitud  $l$  se desea cercar terreno un rectangular por tres de sus lados, ya que el cuarto lado es una barda ya existente, de manera que abarque el área máxima. Hacer una construcción en la que una línea guía sea la longitud  $l$  y donde se muestre dicha área máxima. Ver figura 45.

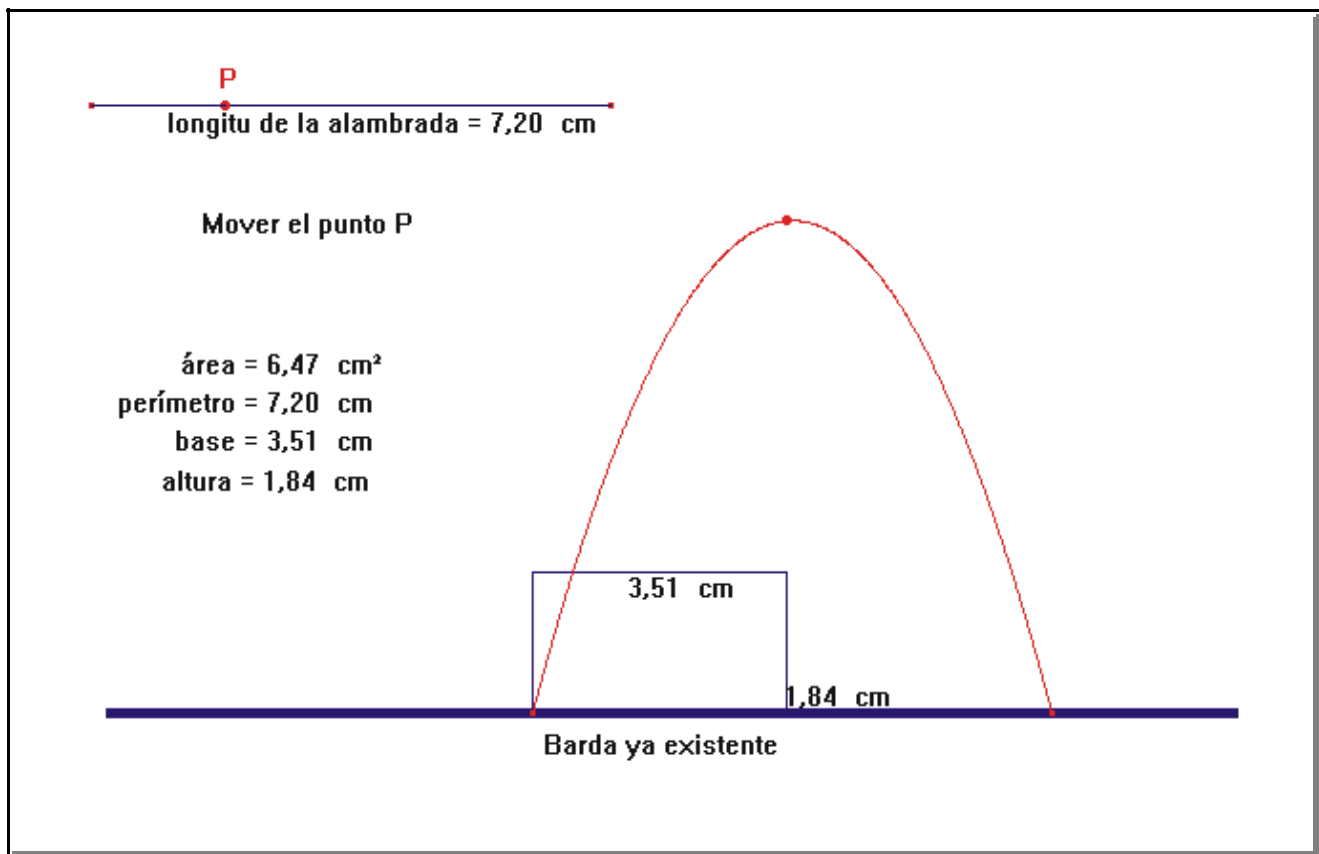


figura 45



## EJERCICIO 55

La definición de la derivada es  $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Su interpretación geométrica es que cuando el incremento de  $x$  tiende a cero, la secante a la curva  $y = f(x)$  se aproxima a la recta tangente a dicha curva

en el punto de coordenadas  $(x, y)$ . Hacer una construcción que muestre lo anterior.

**solución:**

- En el primer icono de derecha a izquierda dar clic en **mostrar ejes**. Arrastrar los ejes hacia la parte inferior izquierda dando clic sin soltar en el origen de coordenadas.
- Colocar 5 puntos distribuidos aproximadamente como se muestran en la figura 46. Al tercer punto llamarlo **P**.

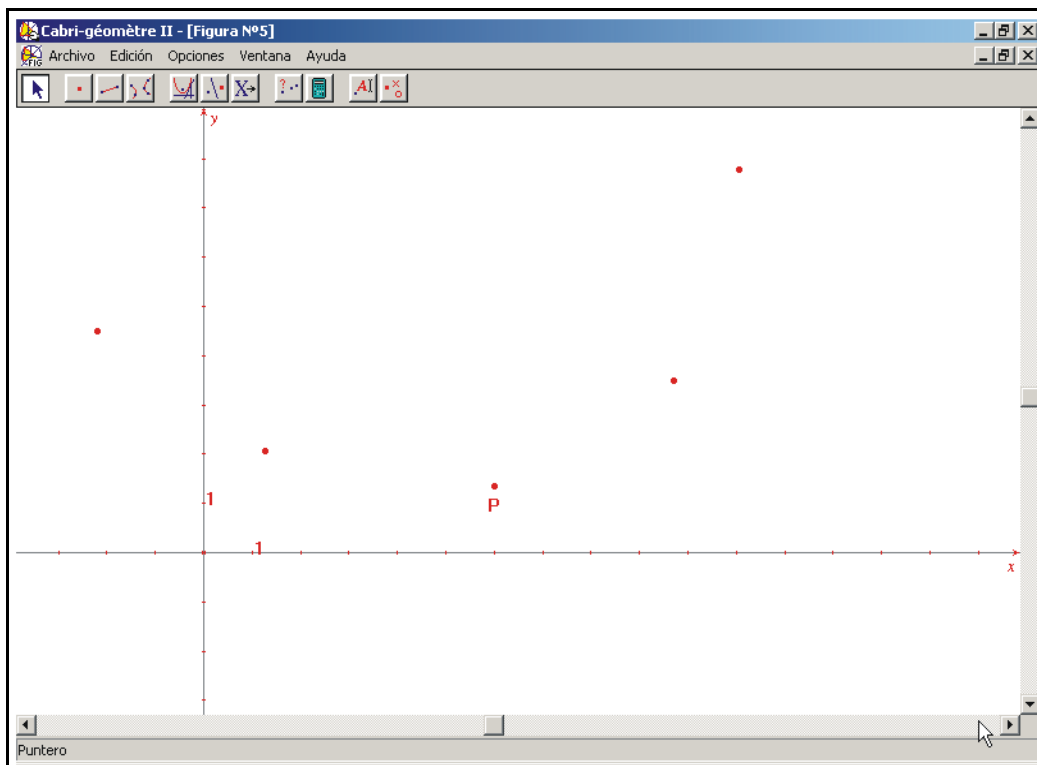


figura 46

- c) Activar **cónica** en el tercer icono de izquierda a derecha y dar clic en los cinco puntos para obtener una curva.
- d) Colocar un punto  $Q$  sobre la curva anterior, en la parte superior derecha de la curva.
- e) Trazar una recta desde  $P$  a  $Q$  y darle formato con línea punteada. Ésta es la secante  $S$  a la curva.
- f) Trazar una recta  $T$  que pase por el punto  $P$ , de manera que quede aproximadamente tangente a la curva en ese punto. La construcción en este momento debe estar como lo muestra la figura 47.

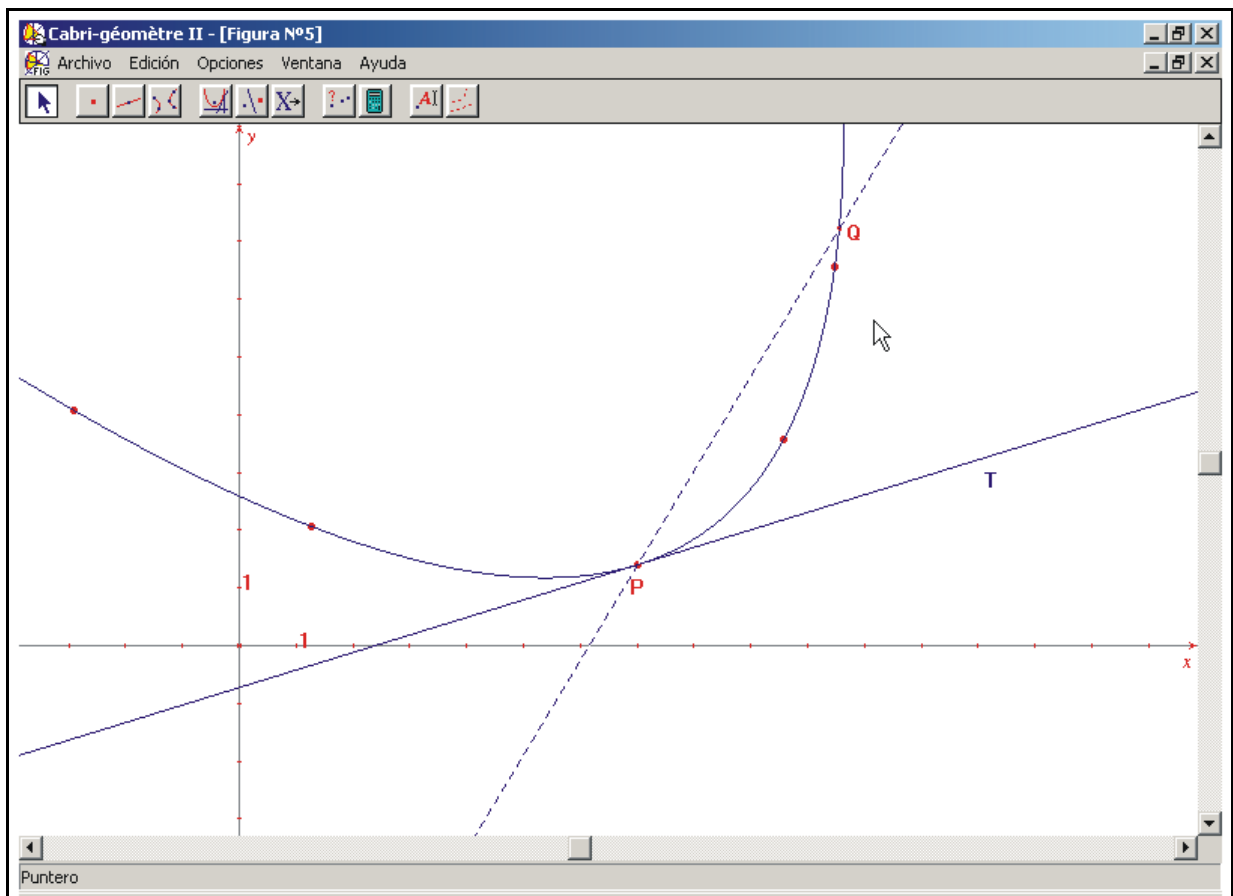


figura 47

- g) Ocultar los puntos con los que se trazó la curva, excepto el punto  $P$ .
- h) Trazar una recta que pase por el punto  $P$  y que sea paralela al eje  $x$ .
- i) Trazar otra recta que pase por el punto  $Q$  y que sea paralela al eje  $x$ .

- j) Trazar una recta que pase por el punto  $P$  y que sea perpendicular al eje  $x$ .
- k) Trazar otra recta que pase por el punto  $Q$  y que sea perpendicular al eje  $x$ .
- l) Colocar un punto a la derecha de  $Q$  y sobre la recta horizontal que pasa por  $Q$ .
- m) Trazar una recta vertical, paralela al eje  $y$ , que pase por el punto colocado en el paso anterior.
- n) Continuar la construcción hasta obtener la figura 48:

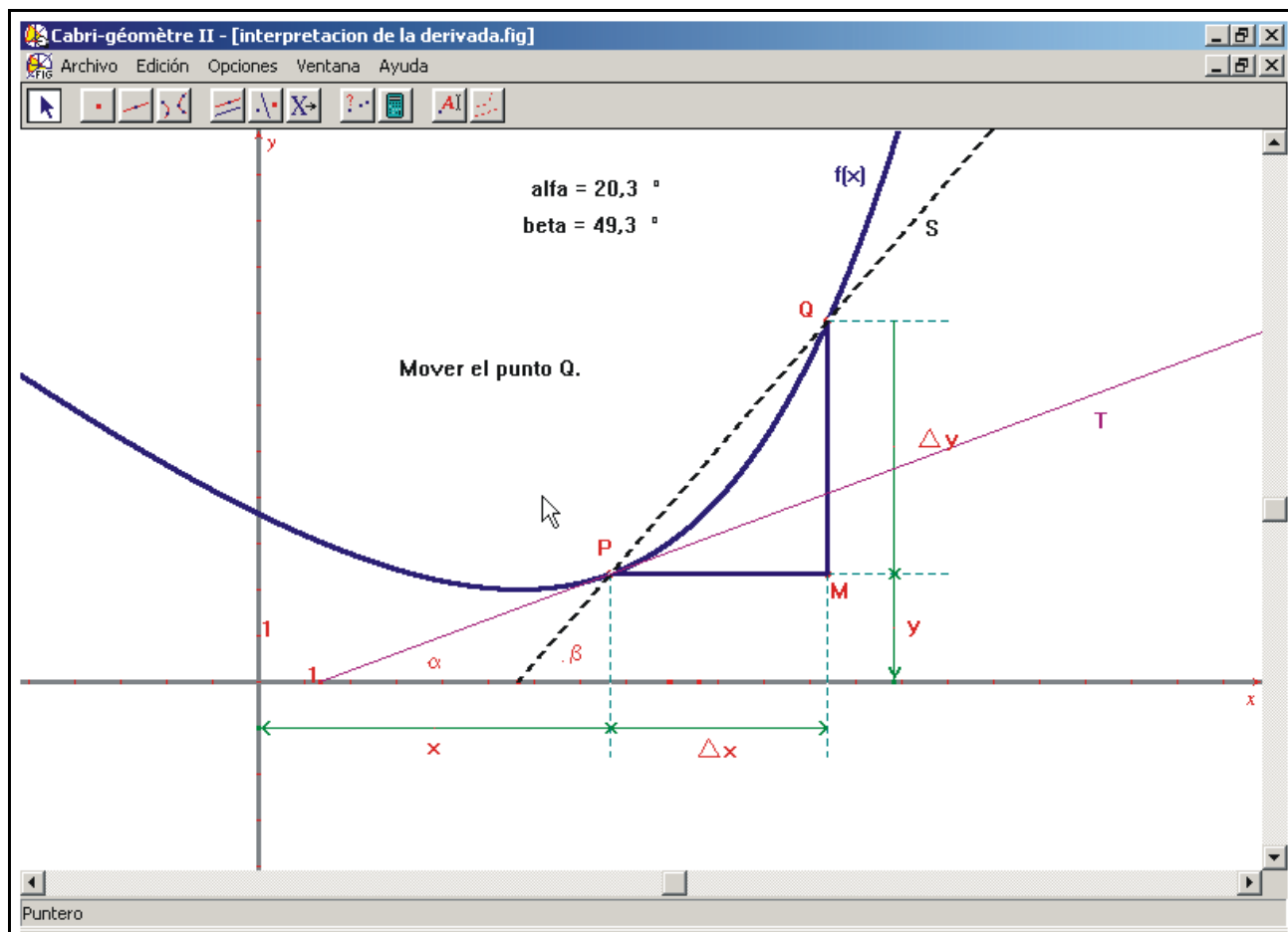


figura 48

Una vez concluido, para poder tener calificación en este ejercicio, los integrantes del equipo deberán explicar en forma oral al profesor la definición de la derivada a través de este ejercicio, es decir, cómo cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , por su parte la recta secante  $S$  se aproxima a la recta tangente  $T$ .

## EJERCICIO 56

Los triángulos rectángulos tienen dos propiedades importantísimas que no tienen los demás triángulos. La primera está expresada en el Teorema de Pitágoras, la segunda está resumida en las funciones trigonométricas. El ejercicio 56 se refiere a la primera propiedad, el ejercicio 57 a la segunda.

Realizar una construcción que demuestre el Teorema de Pitágoras. Debe consistir en un triángulo rectángulo cualquiera con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Como el área de un cuadrado es lado por lado, o sea lado al cuadrado, que es lo que dicta este teorema, entonces debe ponerse el área de cada cuadrado con la herramienta **Área**, en el tercer icono de derecha a izquierda. Luego con la **calculadora** de Cabri hacer la suma de las áreas de los catetos, editarla con un texto apropiado como se muestra en la figura 49 y ver que esa suma es lo mismo que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

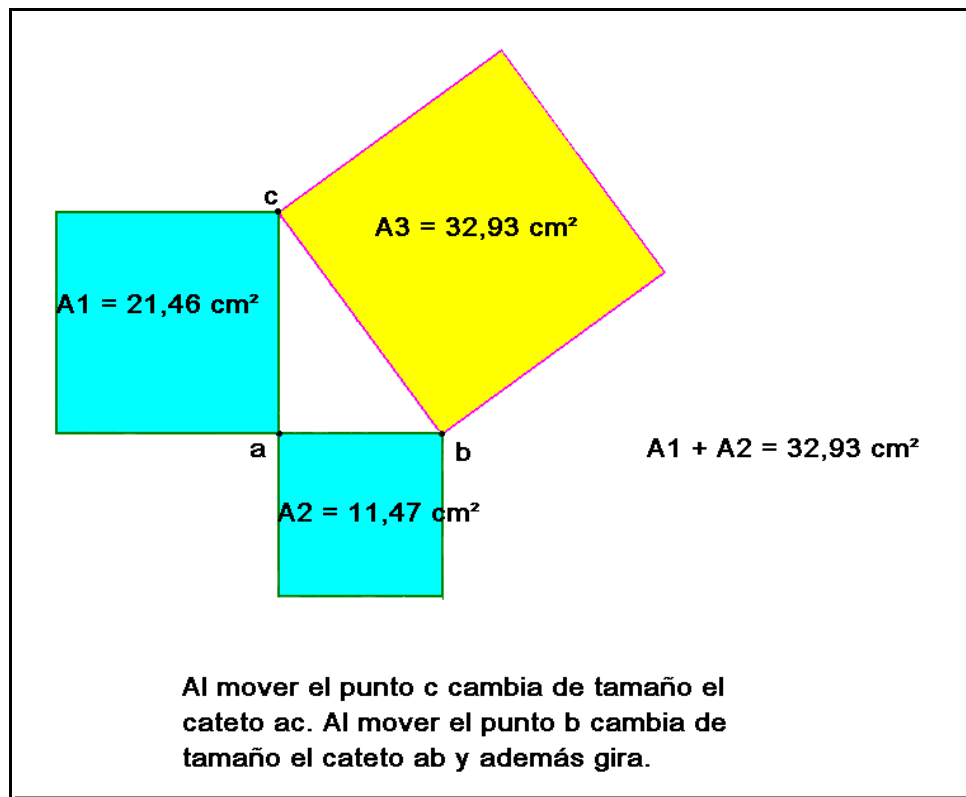


figura 49

## EJERCICIO 57

La segunda gran propiedad de los triángulos rectángulos está resumida en las funciones trigonométricas. Consiste en que para cualquier ángulo fijado en el triángulo rectángulo, la división de la longitud del lado (cateto) opuesto a dicho ángulo entre la longitud del lado (cateto) adyacente siempre da el mismo valor sin importar el tamaño de los lados. Lo mismo puede afirmarse de cualquier otro par de lados seleccionado.

Por ejemplo, si el ángulo establecido es de  $30^\circ$ , la división de la longitud del cateto opuesto entre el cateto adyacente siempre va a dar 0.57735. La división de la longitud del cateto opuesto entre la hipotenusa siempre va a dar 0.5. La división de la longitud del cateto adyacente entre la hipotenusa siempre va a dar 0.86602.

Como son seis las posibles divisiones que se pueden hacer entre dos lados de un triángulo rectángulo, para distinguirlas se les ha puesto un nombre a cada una de ellas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Y como para cada ángulo, sin importar la dimensión de los lados, siempre se obtiene el mismo cociente, estos valores han sido recogidos en las funciones trigonométricas.

Verificar con una construcción esta segunda propiedad de los triángulos rectángulos. Para ello, construir un triángulo rectángulo tal que al mover el punto **b** varíen las longitudes de sus lados, pero permanezca constante el ángulo **cab**; y que al mover el punto **p** cambie el valor del ángulo **cab**, pero permanezca constante el cateto **ab**, como lo muestra la figura 50.

1. Poner el punto **a** y a partir de él una semirrecta. Sobre la semirrecta colocar el punto **b** y luego una perpendicular a la semirrecta que pase por **b**. A continuación una circunferencia con centro en **a** y radio **ab**. Sobre la circunferencia colocar el punto **p**. Trazar una semirrecta a partir de **a** y que pase por **p**. Con segmentos concluir el triángulo rectángulo.
2. Poner la longitud de la hipotenusa **h**, del cateto adyacente **ca** y del cateto opuesto **op**. También el valor del ángulo con la herramienta **Ángulo** del tercer icono de derecha a izquierda. Igualmente marcar el ángulo con la herramienta **Marca de ángulo** del segundo icono de derecha a izquierda.
3. Con la **calculadora** de Cabri, hacer las divisiones:
  - de la longitud del cateto opuesto entre la hipotenusa,
  - de la longitud del cateto adyacente entre la hipotenusa,
  - de la longitud del cateto opuesto entre el cateto adyacente.

y arrastrar los valores obtenidos a la parte superior derecha de la pantalla. Debe editarse el texto e ir antecedido del título DIVISIONES CON LA CALCULADORA , como lo muestra la figura 26.

4. Nuevamente con la **calculadora** de Cabri obtener el valor del seno, del coseno y de la tangente del ángulo que aparece en la figura. Poner el título FUNCIONES CON LA CALCULADORA y a continuación, editados los textos, arrastrar los valores a la pantalla como se ve en la figura 50.
5. Mover el punto **b** para verificar que aunque cambien las dimensiones de los lados, mientras el ángulo permanezca constante, las divisiones de los lados permanecen constantes e iguales a las funciones trigonométricas. Luego variar el ángulo a otro valor y repetir la demostración. Hacer la demostración delante del maestro.

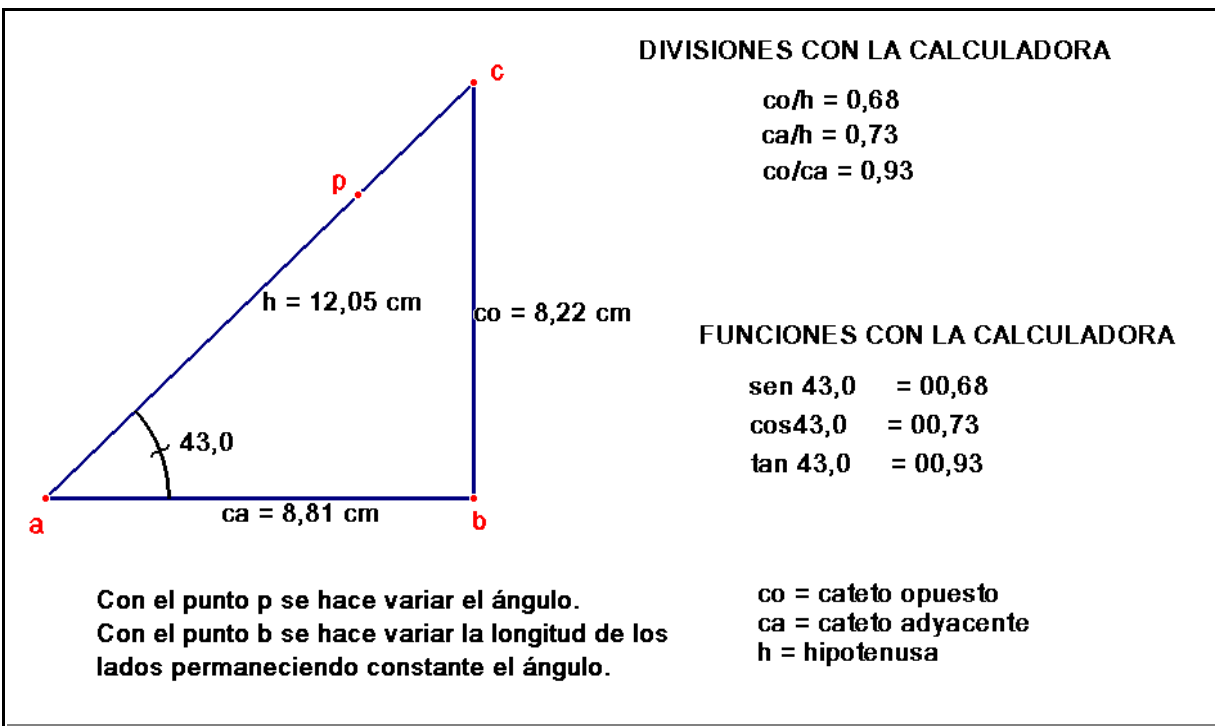


figura 50