ÍNDICE GENERAL

A LOS ALUMNOS:

Cuatro cosas muy importantes para aspirar al éxito en este curso:

PRIMERO: Es conveniente que el alumno, antes de iniciar el estudio de las Matemáticas contenidas en el presente libro, se detenga un poco a reflexionar sobre los planteamientos que se van a exponer, pues en caso de mentalizarse plenamente en ellos, logrará, posiblemente, desterrar de su mente la idea que casi todos arrastran al entrar a un aula: *¿Y yo para qué quiero aprender Matemáticas si no las voy a necesitar nunca, ya que voy a estudiar para ...?*

Se habrá dado cuenta ya el estudiante que la única materia que no le faltado, desde primero de primaria hasta concluir su preparatoria, es la Matemática. En todos los niveles siempre hay Matemáticas, ¿por qué?

He allí el punto clave para desterrar de todas las mentes aquello de *¿Y yo para qué quiero aprender Matemáticas si voy a ser Filósofo ..., o Licenciado en Derecho ..., o Veterinario..., o Psicólogo...?* El asunto está en que las Matemáticas NO SON PARA APRENDERSE, sino PARA UTILIZARSE. Los únicos que realmente deben aprenderse las Matemáticas son los que van para una carrera técnica, como ingeniería, o Físico-matemáticas, etc. Ellos sí; los demás no. Lo anterior se refiere a las Matemáticas que se estudian a nivel preparatoria, pues es indudable que todos requieren de la Aritmética de la primaria para sumar, restar, multiplicar, etc.

Las Matemáticas tienen por objetivo fundamental el de promover, fomentar, despertar y ejercitar en cada estudiante su capacidad intelectual, de raciocinio, de juicio, de ordenación de pensamientos y de pensamiento ordenado, de inducción y de deducción. Las Matemáticas deben ser para utilizarlas en ese sentido, como una herramienta para conseguir de la mejor manera el constante ejercicio intelectual del estudiante. Solamente practicando se llega a tener habilidad en cualquier aspecto de la vida. Por eso el guitarrista pone las posiciones o tonos sin ver siquiera el diapasón de su instrumento musical, o la secretaria escribe correctamente sin mirar el teclado, debido a la práctica que los ha convertido en personas sumamente hábiles en aquella actividad que tanto han practicado. Para obtener personas con habilidad mental es necesario ponerlas a ejercitar su gran potencialidad intelectual que permanece muerta en el cerebro mientras no haya ese ejercicio.

Está muy claro que en cada salón hay un grupo muy heterogéneo de alumnos, mezcla de vocaciones, polarización de habilidades individuales simultáneamente con torpezas, tendencias, gustos, inclinaciones, de todo lo cual se desprende que, por lo general, la mayoría no necesita (o no necesitará en sus estudios de licenciatura) toda esa Matemática que se imparte en la preparatoria, por lo que, además de aborrecerla a las Matemáticas las mayorías, suelen estar al acecho de tirarlas a la basura en cuanto aprueben el curso respectivo. Los únicos que por sí mismos se apoderarán de las Matemáticas son los que gustan de ellas y que se inclinan por una carrera técnica, los que tienen vocación y habilidades para ella.

El alumno que no quiere saber nada de las Matemáticas, sin que exista posibilidad de evitarlo, tirará a la basura todas esas Matemáticas que le estorban cada vez que apruebe la materia y en ese momento se sentirá "liberado"; lo que él no sabe es que atrás de eso se lleva, si es que sus profesores respectivos utilizaron las Matemáticas como herramienta para eso, una gran dosis de ejercitación mental que lo hará más apto en su vida para todo lo que implique o requiera juicios sólidos y pensamientos ordenados.

Ante este panorama, si el alumno consigue desterrar de su mente esa idea que hasta lo bloquea contra las Matemáticas, que lo ha hecho de por vida sentir que las Matemáticas son horrorosas, todo eso de que *yo no sirvo para las Matemáticas,* o que *las Matemáticas a mí no se me dan,* si consigue, pues, desterrarlo para suplirla por el verdadero objetivo, si se mentaliza en que las Matemáticas van a ser simplemente un instrumento para ejercitar su capacidad pensante, si lo logra habrá dado un paso vital para desenemistarse con esta materia y aceptarla por lo menos un poquito por tratarse de una excelente aliada de su desarrollo intelectual.

Debe además quedarle claro al alumno que el presente texto no está hecho de la manera más fácil respecto de las formas posibles de resolver los problemas de cada tema, sino de la manera más reflexiva posible. Encontrará el estudiante, posiblemente, algunas reglas que le parezcan más complicadas que otras más sencillas aprendidas en años escolares anteriores, a lo que dirá *es que es más fácil hacerlo así.* Cuando se encuentre en tal situación, recuerde que el objetivo de las Matemáticas no es que las aprendan, menos que las memoricen, sino que las utilicen para ejercitar su capacidad intelectual. Y eso es lo que se pretende en este texto.

SEGUNDO: En función de lo anterior se recomienda al alumno no mecanizar los procesos que llevan a ciertas soluciones, porque eso es lo que con más facilidad lo hará caer en constantes errores. Las Matemáticas deben razonarse, debe entenderse el por qué de cada cosa, su lógica, su razón de ser. Sólo así el estudiante eliminará muchos de sus fallas.

Una de las razones por las que al estudiante se le dificultan tanto las matemáticas es porque todo lo mecaniza, todo se lo aprende de memoria. Llega entonces el momento en que “ha mecanizado” tantos procedimientos que ya confunde unos con otros.

TERCERO: Es necesario aclarar algunos aspectos de terminología para no caer en determinadas mecanizaciones de procesos. Existe la equivocada creencia, porque lamentablemente así lo enseñan algunos profesores, que una cantidad que está sumando "pasa" al otro lado del signo igual restando; o si está restando "pasa" sumando; o si está multiplicando "pasa" dividiendo; o si está dividiendo "pasa" multiplicando. Todo eso es falso, no tiene ninguna razón de ser, no hay lógica en eso. Son mecanismos que agilizan los procesos de despejar, pero que llevan a errores a los inexpertos en Matemáticas.

Es indispensable recordar que si se tiene una igualdad, por ejemplo,

$$2x - 7 = 1$$

para despejar la incógnita x NO “se pasa" el **- 7** al otro lado sumando, pues no existe lógica para suponer que el número **- 7** "pase" al lado derecho con la operación contraria. Los números no son mariposas o golondrinas para suponer que "se pasan" de un lado a otro como si anduvieran volando. Lo que realmente se hace es aplicar la ley de las igualdades que dice que *lo que se haga de un lado de la igualdad debe hacerse del otro lado también para que la igualdad se conserve.* ¿Qué se necesita para que el número **- 7** se elimine? Fácil, sencillamente sumarle **+ 7**, entonces a la igualdad se le suma en ambos lados ese $+ 7$ que se necesita, quedando así:

$$2x - 7 \mathbf{+ 7} = 1 \mathbf{+ 7}$$

Si se hacen las operaciones únicamente en el lado izquierdo de la igualdad (en el lado derecho no), se eliminan el **- 7** con el **+ 7**, quedando entonces

$$2x = 1 + \mathbf{7}$$

y allí es donde da la impresión de que el **- 7** original "pasó" al otro lado con signo contrario; pero es solamente una apariencia, no una realidad. Analizando el lado derecho, a simple vista se ve que lo anterior es lo mismo que $2x = 8$ (sumando 1 + 7) . Posteriormente, para despejar la incógnita x es necesario quitarle su coeficiente **2** que le multiplica, lo cual se consigue dividiendo entre **2**; pero nuevamente por la ley de las igualdades, debe hacerse en ambos lados, quedando así:

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

Si se efectúan nuevamente las operaciones únicamente en el lado izquierdo de la igualdad (en el lado derecho no), se simplifican **2** del numerador con el **2** del denominador, quedando entonces

$$x = \frac{8}{2}$$

y otra vez da la impresión de que ese **2** "pasó" al otro lado dividiendo. Pero no pasa de ser una apariencia.

Esas pseudoreglas del *pasa al otro lado a...* llevan más adelante a errores y a la incapacidad a despejar de fórmulas de Física, Química o aún de las mismas Matemáticas, como en el siguiente caso: Se desea despejar x de la igualdad

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{x} + 15$$

Los alumnos que por mecanizar procesos en vez de razonarlos o que por parecerles más fácil y rápido prefirieron "aprenderse" sus reglitas del *pasa al otro lado a...*, lo que ven es que la literal a del primer denominador está dividiendo y, por lo tanto, por su "infalible" regla anterior, sencillamente debe "pasar" al otro lado multiplicando, de la siguiente manera:

$$2 = a\left(\frac{1}{x} + 15\right)$$

luego, como la incógnita x del segundo denominador también está dividiendo, por su "infalible" regla anterior, de nuevo debe "pasar" al otro lado multiplicando, de la siguiente manera:

$$2(x) = a(1 + 15)$$

efectuando operaciones:

$$2x = a(16)$$
$$2x = 16a$$

finalmente, como el coeficiente 2 está multiplicando, “pasa” a dividir al otro lado:

$$x = \frac{16a}{2}$$

para llegar al siguiente resultado:

$$x = 8a$$

lo cual es totalmente falso por haberse creído de la pseudoregla de que *lo que está sumando pasa al otro restando y lo que está multiplicando pasa dividiendo.*

El proceso correcto es aplicar la ley de las igualdades, que *lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve*, conforme se vayan requiriendo agregar operaciones para eliminar ciertas cantidades. Debe hacerse de la siguiente manera:

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{x} + 15$$

Para simplificar la literal a del primer denominador, debe multiplicarse por a, pero toda la igualdad; para simplificar la incógnita x del segundo denominador, debe multiplicarse por x toda la igualdad para que no se altere. Haciendo ambas operaciones simultáneamente, queda:

$$(a)(x)\left(\frac{2}{a}\right) = (a)(x)\left(\frac{1}{x} + 15\right)$$

multiplicado y simplificando:

$$(\cancel{a})(x)\left(\frac{2}{\cancel{a}}\right) = (a)(\cancel{x})\left(\frac{1}{\cancel{x}} + 15\right)$$

$$2x = a + 15ax$$

para juntar los términos con x, se resta $\mathbf{-\ 15}\boldsymbol{ax}$ en ambos lados:

$$2x \mathbf{-\ 15}\boldsymbol{ax} = a + 15ax \mathbf{-\ 15}\boldsymbol{ax}$$

$$2x - 15ax = a$$

factorizando:

$$x(2 - 15a) = a$$

dividiendo ambos lados entre **(2 - 15*a*)** y simplificando:

$$\frac{x\cancel{(2-15a)}}{\cancel{(2-15a)}}=\frac{a}{(2-15a)}$$

$$x=\frac{a}{2-15a}$$

resultado totalmente diferente al otroo obtenido a través de las mecanizadas reglitas del *pasa al otro lado a ....*

CUARTO: En forma muy general, la enseñanza de las Matemáticas tiende a la preocupación de cada maestro porque sus alumnos aprendan a hacer cuentas nada más, pero descuidan un aspecto importantísimo: la escritura.

Existen disciplinas y ciencias dentro del mundo del conocimiento humano que incluyen su propia terminología como por ejemplo, la música, el Lenguaje, las Matemáticas, etc. Una persona puede aprender a hablar, pero no saber escribir por desconocer la simbología propia del lenguaje, es decir, el abecedario, y entonces su aprendizaje del idioma será muy limitado. Lo mismo puede decirse de la música, en la que hay personas que aprenden a medio tocar un instrumento, pero no saben solfeo, que es la simbología de la música, y por lo tanto sus conocimientos musicales son muy pobres.

En Matemáticas sucede lo mismo: es necesario aprender su propia simbología para que el aprendizaje sea completo. Por lo tanto, no deberá extrañarle al alumno que durante todo su recorrido por esta Preparatoria se le enseñará y exigirá no solamente saber hacer cuentas y resolver problemas, sino a escribir correctamente utilizando de manera apropiada todos los símbolos requeridos.

Las reglas principales de escritura se mencionan a continuación.

REGLAS GENERALES

1) ***PRINCIPIO FUNDAMENTAL: Toda regla de escritura matemática debe facilitar la comprensión de los objetos matemáticos representados y su lectura.***

2) ***En la escritura matemática, deben emplearse el mínimo de símbolos posibles***

La razón principal de esta regla es para hacer más fluida la lectura. Mientras más símbolos haya, todo parece más complicado o engorroso.

Por esta regla no se escriben, por ejemplo:

a) <u>El coeficiente 1:</u> se escribe x^2 en vez de $1x^2$.
b) <u>El signo + al principio:</u> se escribe $x^2 - y^2$ en vez de $+ x^2 - y^2$.
c) <u>El índice de radical 2:</u> se escribe $\sqrt{3ab}$ en vez de $\sqrt[2]{3ab}$

d) El denominador 1: se escribe x^2 en vez de $\dfrac{x^2}{1}$

e) El exponente 1: se escribe x en vez de x^1

Etc.

Nótese la diferencia entre escribir $\dfrac{+1\sqrt[2]{+1x^{+1}}}{+1}$ y $\sqrt{x}$ que representan el mismo objeto matemático, pero uno resulta muy complicado en su lectura.

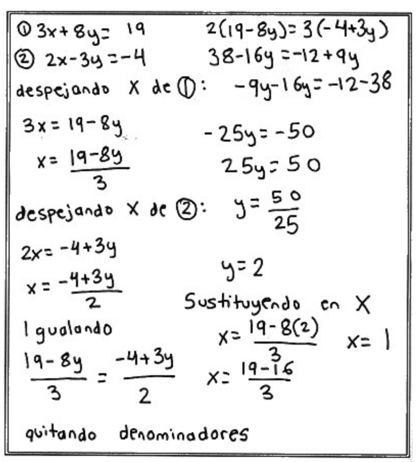
3) ***No debe emplearse el mismo símbolo con dos significados diferentes, al menos en el mismo contexto.***

4) ***Debe escribirse en el mismo orden en que se lee, es decir de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.***

La razón de esta regla es para forzar al lector a seguir el proceso en el orden en que se llevó a cabo, leyendo en el orden en que se escribió.

Las fallas a esta regla son muy abundantes y graves. Puede decirse que son las más socorridas y a las que menos aprecio se les hace. Las principales son:

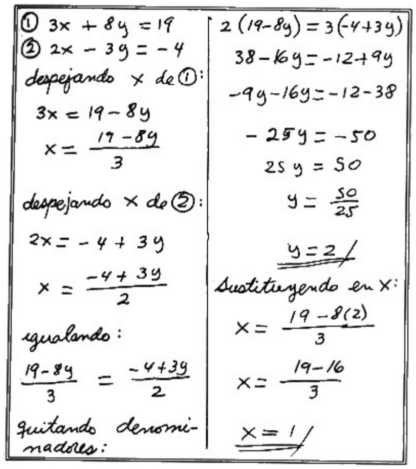
a) Regresar a lo anterior;
b) Escribir en columnas sin separación entre éstas;
c) Escribir en columnas y líneas desordenadamente;
d) Escribir en donde haya espacio.



¿Cómo debe leerse este texto?

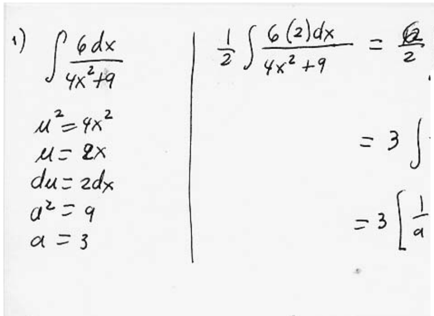
¿Por líneas o por columnas?

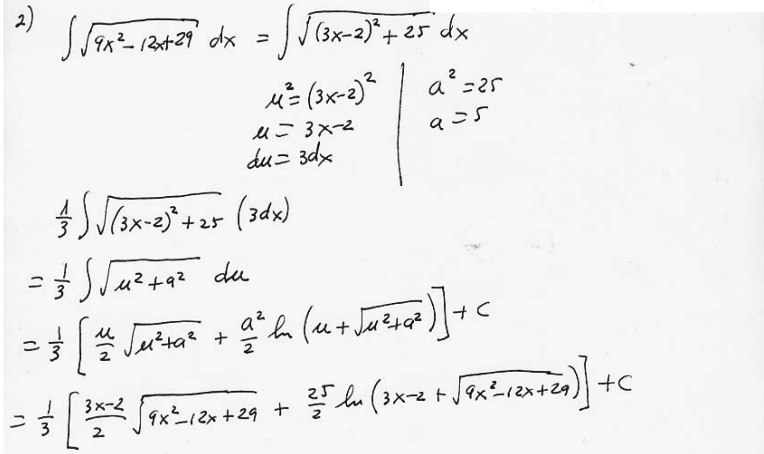
¿Cómo saber en qué momento dejar de leer por líneas para comenzar por columnas?



En cambio así, con la delimitación de las columnas, queda perfectamente claro cómo debe leerse.

Se aconseja escribir en columnas cuando los renglones sean muy cortos, delimitando dichas columnas por una línea vertical. Pero debe tenerse cuidado de que las columnas deben ser de arriba a abajo de la hoja, no en pedazos únicamente. Un error muy frecuente del alumno es escribir por columnas, pero sólo en una parte de la hoja, o bien por partes en varias columnas independientes, lo que hace más complicada la lectura en vez de facilitarla ya que acaba aquello convertido en un rompecabezas.





En este examen, el alumno escribió primero tres columnas, luego dos y luego ninguna (una, de hecho). Esta escritura por columnas de manera parcial, en vez de facilitar la lectura, la dificulta.

¿Cómo debe leerse?

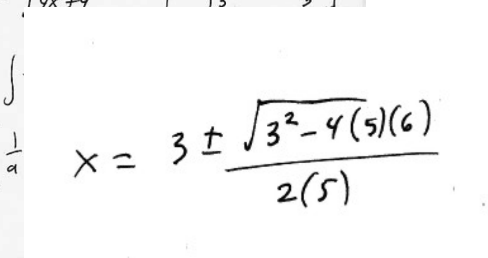
Después de $a = 3$, ¿debe continuarse hacia abajo o hay que brincar al otro lado de la minicolumna?

¿Hasta dónde debe leerse por columnas y en qué momento debe darse el salto “al otro lado”?.

¿y el lector cómo va a adivinar de qué manera debe leer?

5) ***Los operadores deben abarcar de manera clara y completa a todos los elementos a los que afectan.***

Un caso muy característico es cuando se emplea la fórmula para las ecuaciones de 2º grado, en la que ni la línea de fracción ni el radical se escriben abarcando a todos los elementos que abarcan. Por ejemplo, cuando se va a resolver la ecuación $5x^2 - 3x + 6 = 0$, es común que el alumno escriba de la siguiente forma:



en donde el radical no está abarcando a los factores (5) y (6) y la línea de fracción no está abarcando al 3 inicial.

6) ***Los términos algebraicos (sin factores trascendentes) que contengan algún radical deben escribirse en el siguiente orden:***

a) Primero el signo;

b) después los coeficientes numéricos;
c) a continuación los factores algebraicos monomios en orden alfabético;
d) luego los factores algebraicos polinomios;
d) y finalmente los factores irracionales (radicales).

La razón de esta regla es para evitar confusiones cuando se coloca primero el radical, ya que puede aparecer la duda de ¿hasta dónde abarca el radical?

Por ejemplo, $\sqrt{2x^2 + ab}$ ¿significa $\sqrt{2x^2 + ab}$ o $\left(\sqrt{2x^2 + a}\right)b$. Si se trata del segundo caso, la duda se elimina escribiendo $b\sqrt{2x^2 + a}$.

7) ***Los términos, en general, deben escribirse en el siguiente orden:***

a) Primero el signo;
b) después los coeficientes numéricos;
c) a continuación los factores algebraicos, conforme a la regla 6;
d) los factores de la forma e^u ;
e) los factores trascendentes;
f) finalmente las derivadas o integrales.

Ejemplos:

I) $-2ax^2\left(c^2 - y^3\right)\sqrt{x+y}$

II) $5x^3\left(a^2 - 7\right)\sqrt[4]{3abc^6}\ e^{2x}$

III) $\left(a^2 - b^2\right)^3 sen\,2x \log y^2$

IV) $-5x^3e^{x+y}\ \tan\left(3-x\right)^3 \dfrac{d}{dx}\left(2x^3 - 4x^2 + 5x - 11\right)$

8) ***Las literales en las expresiones algebraicas deben escribirse en orden alfabético.*** Simplemente porque lo ordenado es mejor que lo desordenado.

REGLAS PARTICULARES

I.- PARA FRACCIONES

9) ***Las líneas de fracción deben escribirse horizontalmente.***

La razón de esta regla es para evitar las confusiones a que la línea diagonal puede dar origen.

Por ejemplo 12/a + b ¿significa $\dfrac{12}{a+b}$ o bien $\dfrac{12}{a}+b$?.

a/b/c ¿significa $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ o bien $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$?

El uso de paréntesis , aunque ciertamente despeja algunas dudas en la escritura, va contra la regla 1, pues la escritura lineal es más complicada de comprender. Por ejemplo, descifrar el significado de cada objeto matemático siguiente resulta muy complicado

$$(((3x^2+5ab)\wedge(x-y))/(5a-2x))(a+b)+(3x-5)\wedge(a+b)$$

comparado con la escritura

$$\left(\frac{\left(3x^2+5ab\right)^{x-y}}{5a-2x}\right)\left(a+b\right)+\left(3x-5\right)^{a+b}$$

en donde se a primera vista se lee que $x - y$ es un exponente; que $5a - 2x$ es denominador; que $(a + b)$ es factor de la fracción, etc., lo que no se ve tan rápidamente en la escritura lineal.

Una excepción es la de las fracciones que son exponentes, cuyos numerador y denominador son un número o una literal. En este caso es más conveniente la línea de fracción diagonal que la horizontal, pues así se evitan “torres” que rompen la armonía de los renglones. Por ejemplo, $a^{2/7}$ es más conveniente que $a^{\frac{2}{7}}$. El espacio generado entre el presente renglón y el anterior es mucho mayor que el generado entre los otros renglones debido a esta “torre”.

10) ***Los operadores entre fracciones y el signo igual deben escribirse a la mitad de la(s) línea(s) de fracción.***

$$\frac{a}{b}+\frac{2}{x}=6$$ escritura correcta

$$\frac{a}{b}\,^{+}\,\frac{2}{x}=6$$ escritura incorrecta

$$\begin{array}{ll} x = & \underline{\;2a+3\;} \\ & \quad\;\; 5 \end{array}$$ escritura incorrecta

OBSERVACIÓN: Debe escribirse primero la línea de fracción para que quede colocada a la mitad del signo igual o de los operadores +, −, × , ÷, etc. y después, encima de ella el numerador y finalmente, abajo de ella, el denominador.

11) ***Tratándose de fracciones complejas, la línea principal de fracción debe escribirse de manera más notoria que las demás, ya sea más larga o más gruesa y oscura. Los símbolos de operaciones y/o el signo igual deben escribirse a la mitad de la línea principal.***

$$\dfrac{\;\frac{2}{a}\;}{x-y} \qquad \text{escritura correcta}$$

$$\dfrac{\;\frac{1}{2}\;}{\frac{x}{y}} \qquad \text{escritura correcta}$$

$$\dfrac{\;\frac{2}{x}\;}{a+b}+5 \qquad \text{escritura correcta}$$

$$\frac{\frac{2}{x}+5}{3} \qquad \text{escritura incorrecta}$$

$$\dfrac{\;\frac{x-6}{3}\;}{\frac{x}{2}}+\dfrac{\;\frac{1}{2}\;}{x}=0 \qquad \text{escritura correcta}$$

II.- PARA PROCESOS GENERALES

12) ***Debe evitarse escribir más de un signo igual en el mismo renglón dentro de un proceso. En todo caso, los signos igual deben escribirse alineados verticalmente al pasar de un renglón al otro.***

Por ejemplo:

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x+xy}=\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x(1+y)}=\frac{2(1+y)+5(x)}{x^2(1+y)}=\frac{2+2y+5x}{x^2+x^2y}$$

debe escribirse

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x+xy}=\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x\left(1+y\right)}$$

$$=\frac{2\left(1+y\right)+5\left(x\right)}{x^2\left(1+y\right)}$$

$$=\frac{2+2y+5x}{x^2+x^{2y}}$$

13) ***Cuando un proceso matemático consta de varios pasos, cada uno de ellos debe escribirse en renglón aparte, no en la misma línea.***

14) ***No deben escribirse paréntesis adentro de paréntesis de la misma forma mientras no se hayan cerrado. Los paréntesis más interiores deben ser más pequeños que los que los encierran.***

La razón principal es para localizar fácilmente a cada paréntesis que abre con el que le cierra.

$$(((3x^2+5ab)(x-y))+(5a-2x)\mathbf{)}(a+b)+(3x-5)(a+b)$$

¿a cuál cierra?

en cambio

$$\left\langle \left[(3x^2+5ab)(x-y)\right]+(5a-2x)\right\rangle\left\langle a+b\right\rangle+(3x-5)(a+b)$$

facilita la localización del cierre de cada paréntesis.

15) Toda cantidad decimal cuya parte entera sea cero debe escribirse forzosamente el cero antes del punto decimal.

La razón es que si no se escribe el cero puede pasar desapercibido el punto decimal o confundirse con alguna mancha del papel. El cero es para llamar la atención que allí hay un punto.

Ejemplos:	0.27	Correcto
	.34	Incorrecto, el punto decimal no es obvio.