

1 GEOMETRÍA PLANA

1.1 RECTAS Y ÁNGULOS

Aunque el significado original de *geometría* tiene que ver con la *medición de la tierra*¹, tal concepto ya parece muy ajeno a lo que la geometría es en la actualidad. Realmente la geometría avanzó tanto que llegó a convertirse, sin que así estuviera planeado, en una rama de las matemáticas, hasta llegar a existir diferentes tipos de geometrías.

De todas las geometrías que actualmente existen, la geometría plana se refiere al estudio de las figuras que existen *en el plano*. De allí su nombre. Estudiarlas significa conocer sus características, propiedades y a partir de ellas, poder hacer deducciones, como se verá en el transcurso de este estudio.

DEFINICIONES GENERALES

- 1) **Punto**: Es *algo que no posee ni longitud, ni anchura, ni espesor*. Es un concepto, una idea, más que algo real.
- 2) **Vértice**: punto donde se cortan dos rectas.
- 3) **Rectas paralelas** (del griego, *par* = al lado de; y de *allelon* =el uno del otro): son las que por más que se prolonguen nunca llegan a cortarse.
- 4) **Rectas perpendiculares**: son las que forman entre sí un ángulo de 90° .
- 5) **Rectas oblicuas**: son las que no son ni paralelas ni perpendiculares, es decir que forman entre sí un ángulo diferente de 0° y de 90° .

¹ El origen de la geometría proviene del antiguo Egipto, cuando los habitantes de aquellas épocas tuvieron necesidad de hacer mediciones en las tierras de cultivo y labranza después de las crecidas del río Nilo. Posteriormente los chinos, babilonios, romanos y griegos utilizaron este conocimiento en la navegación, agrimensura y astronomía. Conforme se avanzó en estos conocimientos, se desvió la intención original, esa de hacer mediciones sobre los terrenos, para pasar al campo universal de todas las figuras posibles.

- 6) **Ángulos complementarios**: son los que suman 90° .
- 7) **Ángulos suplementarios**: son los que suman 180° .
- 8) **Ángulo agudo**: el que es menor de 90° .
- 9) **Ángulo obtuso** (del latín, *obtusus* = despuntado, sin punta): el que es mayor de 90° .
- 10) **Ángulo recto**: el que mide 90° .
- 11) **Ángulo llano**: el que mide 180° .

SÍMBOLOS

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) \parallel rectas paralelas | 2) \perp rectas perpendiculares |
| 3) \therefore por lo tanto | 4) \sphericalangle ángulo |
| 5) \triangle ángulo medido | 6) \square ángulo recto |
| 7) Δ triángulo | |

RECTAS PARALELAS

Sean las rectas ab y cd paralelas cruzadas por otra recta oblicua ef , las cuales forman los ocho ángulos marcados en la figura 1.1.

- a) son ángulos **opuestos por el vértice** (figura 1.1):

$$\begin{aligned} \sphericalangle 1 \text{ con } \sphericalangle 3 & \quad ; \quad \sphericalangle 2 \text{ con } \sphericalangle 4 & \quad ; \\ \sphericalangle 5 \text{ con } \sphericalangle 7 & \quad ; \quad \sphericalangle 6 \text{ con } \sphericalangle 8 & \quad . \end{aligned}$$

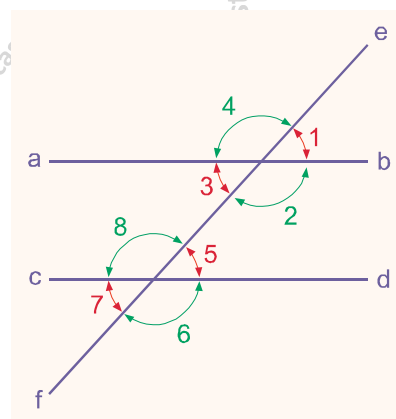


figura 1.1

REGLA: *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

- b) son ángulos **alternos internos**:

$$\sphericalangle 3 \text{ con } \sphericalangle 5 \quad \text{y} \quad \sphericalangle 2 \text{ con } \sphericalangle 8$$

REGLA: Los ángulos alternos internos son iguales.

c) son ángulos *alternos externos*:

$\angle 1$ con $\angle 7$ y $\angle 4$ con $\angle 6$

Ver figura 1.1.

REGLA: Los ángulos alternos externos son iguales.

d) son ángulos *correspondientes*:

$\angle 1$ con $\angle 5$; $\angle 2$ con $\angle 6$;
 $\angle 4$ con $\angle 8$; $\angle 3$ con $\angle 7$

REGLA: Los ángulos correspondientes son iguales.

En general se puede enunciar la siguiente regla:

REGLA: Dos ángulos formados como los de la figura 1, o son iguales o son suplementarios (suman 180°).

1.2 TRIÁNGULOS

Un triángulo es toda figura plana cerrada formada por tres lados. Los triángulos tienen seis elementos básicos que son sus tres lados y sus tres ángulos; y tienen algunos otros elementos secundarios, algunos de los cuales se mencionan en las siguientes definiciones.

DEFINICIONES

- 1) **triángulo equilátero**: Es el que tiene sus tres lados iguales.
- 2) **triángulo isósceles** (del latín, *isosceles* = de piernas iguales): Es el que tiene dos lados iguales.
- 3) **triángulo escaleno** (del griego, *skalenós* = desigual, que cojea): Es el que tiene sus tres lados diferentes.
- 4) **triángulo rectángulo**: Es el que tiene un ángulo recto.

RECTAS IMPORTANTES

- 5) **altura**: Es la distancia perpendicular que va desde un vértice hasta el lado contrario o su prolongación (ver figura 1.2).
- 6) **mediana**: Es la recta que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto. En la figura 1.2, el punto **m** es el punto medio del lado **AC**; por lo tanto, la recta **Bm** es la mediana al lado **AC**.
- 7) **mediatriz**: Es la perpendicular levantada desde el punto medio de cualquier lado. En la figura 1.3, el punto **m** es el punto medio del lado **AC**.
- 8) **bisectriz** (del latín, *bi* = dos veces; *sector* = el que corta): Recta que divide en dos partes iguales a un ángulo (ver figura 1.3).

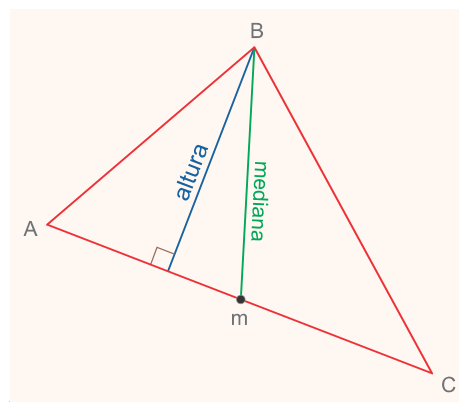


figura 1.2

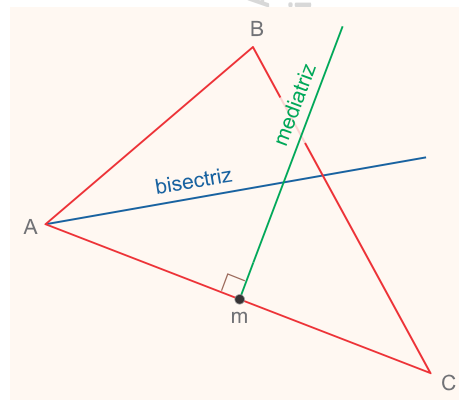


figura 1.3

PUNTOS IMPORTANTES

- 9) **baricentro** (del griego, *báros* = peso): Punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo y corresponde al centro de gravedad del triángulo.

El centro de gravedad de un triángulo es aquel punto en el que si se suspende o cuelga de allí, dicho triángulo permanece en equilibrio absoluto. Recordar que existen dos tipos de equilibrios (a la rotación): el absoluto, como el de una pelota esférica que en cualquier posición que se le ponga está en reposo, siempre y cuando esté en una superficie horizontal, no inclinada; y el equilibrio relativo, que es el que ad-

quieren los cuerpos solamente o hasta que se cumple la condición de que la vertical que pase por su centro de gravedad pase también por su base de sustentación.

En la figura 1.4 los puntos m , n y p son los puntos medios de cada lado y las rectas An , Bm y Cp son las medianas. El punto común en donde las tres se cruzan es el baricentro.

- 10) **circuncentro** (del latín, *circun* = alrededor): Punto donde se cortan las tres mediatrices y corresponde al centro del círculo circunscrito al triángulo.

En la figura 1.5, los puntos m , n y p son los puntos medios de sus respectivos lados. El punto común en donde se cruzan es el circuncentro. Dicho punto es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC . Por lo tanto, las distancias de ese punto de intersección a los vértices del triángulo son iguales por ser radios.

- 11) **incentro** (del latín, *in* = sobre, encima): Punto donde se cortan las tres bisectrices y corresponde al centro del círculo inscrito en el triángulo.

En la figura 1.6, las rectas trazadas desde los vértices A , B y C son bisectrices. El punto común en donde las tres se cruzan es el **incentro**. Dicho punto es el centro del círculo inscrito en dicho triángulo, es necesario trazar una recta perpendicular desde el centro de la circunferencia a cualquiera de los lados, ya que debe recordarse que, por las propiedades de la circunferencia, toda tangente es perpendicular al radio trazado desde el punto de tangencia p .

- 12) **ortocentro** (del griego, *ortho* = recto, correcto): Punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.

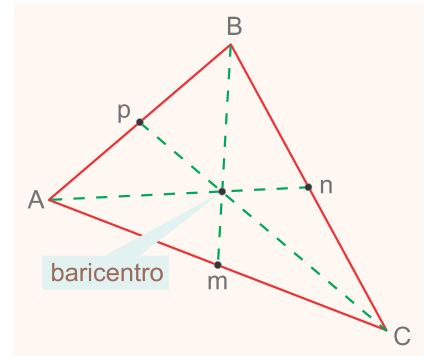


figura 1.4

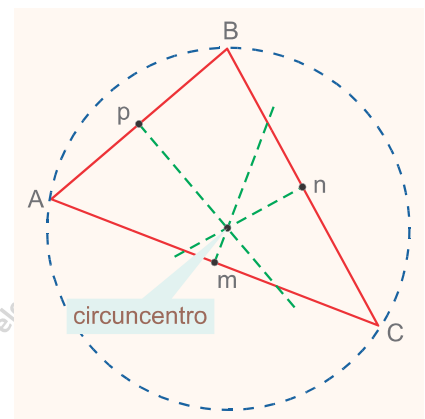


figura 1.5

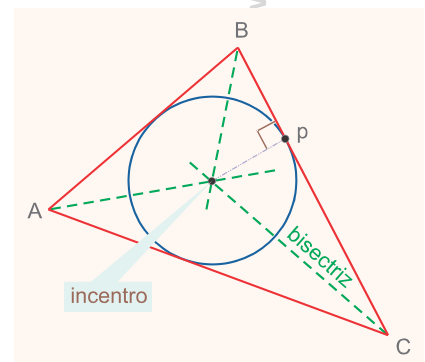


figura 1.6

EJERCICIOS PROPUESTOS

Material: Hoja papel cascarón o ilustración tamaño carta, regla, compás, escuadra y transportador.

- 1) En una hoja tamaño carta de papel cascarón o papel ilustración, trazar un triángulo cualquiera que abarque al máximo dicho papel y localizar su centro de gravedad. Comprobarlo, insertándole una aguja o alfiler allí, girándolo y soltándolo en diferentes posiciones. Debe quedar siempre en perfecto equilibrio.
- 2) En una hoja tamaño carta, trazar un triángulo cualquiera que abarque aproximadamente $2/3$ de dicha hoja y localizar su circuncentro. Trazar la circunferencia circunscrita a dicho triángulo, comprobando que pasa justamente por sus tres vértices.
- 3) En una hoja tamaño carta, trazar un triángulo cualquiera que abarque al máximo dicha hoja y localizar su incentro. Trazar la circunferencia inscrita a dicho triángulo. No olvidar la recta perpendicular auxiliar necesaria para localizar el radio y el punto de tangencia.

PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS

- 1) *En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es 180° .*
- 2) *La mediana trazada desde el vértice que forman dos lados iguales, es al mismo tiempo mediatriz, altura y bisectriz.*

En la figura 1.7, los lados **ab** y **ac** son iguales; además **m** es el punto medio del lado **bc** y, por lo tanto, la recta **am** es una mediana. Como se trata de una mediana trazada desde el vértice formado por dos lados iguales, **am** es entonces también mediatriz, altura y bisectriz de ese ángulo. O sea, es perpendicular al lado **bc**.

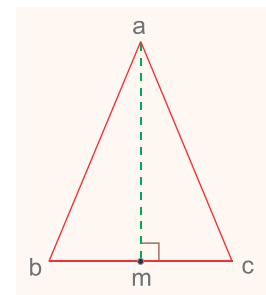


figura 1.7

- 3) *Los ángulos opuestos a lados iguales de un triángulo, son iguales entre sí.*

En la figura 1.8, los lados **ab** y **ac** son iguales. El ángulo opuesto al lado **ab** es el $\angle \theta$ y el ángulo opuesto al lado **ac** es el $\angle \beta$.

Por lo tanto, $\angle \theta = \angle \beta$.

- 4) *En todo triángulo, al lado mayor se le opone el ángulo mayor y al lado menor se le opone el ángulo menor.*

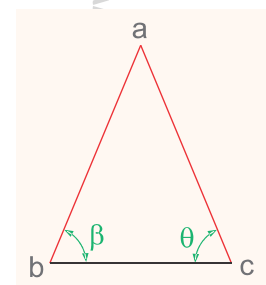


figura 1.8

1.3 CUADRILÁTEROS

DEFINICIÓN: Un **cuadrilátero** es toda figura plana cerrada formada por cuatro lados.

En la figura 1.9 se muestran diferentes casos de cuadriláteros. Los cuadriláteros, respecto de la posición de sus lados, se clasifican en:

- 1) **trapezoide** (el sufijo *oide* significa que se parece o con forma de): el que no tiene ningún par de lados paralelos.
- 2) **trapecio** (del griego, *trapézion* = mesita de cuatro pies): el que tiene un sólo par de lados paralelos.
- 3) **paralelogramo**: el que tiene sus dos pares de lados respectivamente paralelos.

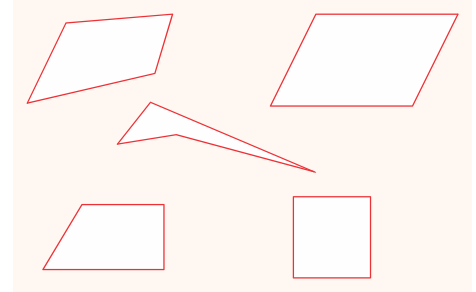
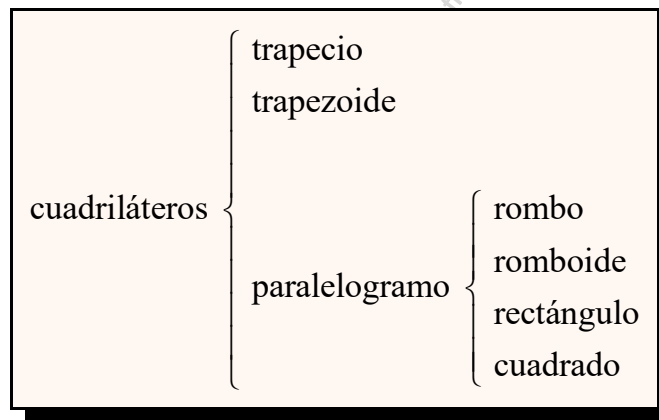


figura 1.9

A su vez, los paralelogramos se clasifican en:

- a) **romboide**: el que tiene sus lados contiguos desiguales.
- b) **rombo** (del griego, *rhombos* = trompo, juguete que se hace girar apoyado en una punta): el que tiene sus lados contiguos iguales.
- c) **rectángulo**: es el romboide cuyos ángulos son rectos.
- d) **cuadrado**: es el rombo cuyos ángulos son rectos.

En síntesis:



PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

- 1) *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*
- 2) *Cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.*
- 3) *Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.*
- 4) *Los ángulos contiguos de un paralelogramos son suplementarios* (suman 180°).
- 5) *Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.*
- 6) *Las diagonales del rectángulo son iguales.*
- 7) *Las diagonales del cuadrado son iguales.*
- 8) *Las diagonales del cuadrado son perpendiculares.*
- 9) *Las diagonales del rombo son perpendiculares.*

1.4 CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Es frecuente utilizar como sinónimos los términos *circunferencia* y *círculo*, cuando en realidad tienen significados diferentes.

La circunferencia (del latín, *circun* = alrededor; y *ferre* = llevar) es la curva cerrada cuyos puntos equidistan de un punto fijo, llamado centro. En otras palabras, “es lo de afuera”, o es “solamente la rayita”.

El círculo (del latín, *circus* = anillo; y *ulo* = pequeño) es el conjunto de puntos interiores a la circunferencia. En otras palabras, abarca “todo lo de adentro”.

DEFINICIONES

- 1) **Radio:** es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia (ver figura 1.10).
- 2) **Cuerda:** es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- 3) **Diámetro** (del griego, *dia* = al través; y de *métron* = medida): es la cuerda que pasa por el centro. Vista desde sus raíces etimológicas tiene el sentido de que a través de esa línea se mide la circunferencia.

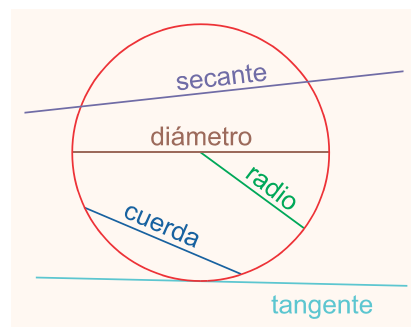


figura 1.10

- 4) **Tangente:** cualquier recta que toque en un solo punto a la circunferencia.
- 5) **Secante** (del latín, *secare* =que corta²): cualquier recta que corte a la circunferencia en dos puntos.
- 6) **Arco:** parte de la circunferencia.
- 7) **Ángulo central:** es el formado por dos radios.
- 8) **Ángulo interior:** es el que tiene su vértice adentro de la circunferencia.
- 9) **Ángulo inscrito:** es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por dos cuerdas (verlo en la figura 1.11).
- 10) **Ángulo semiinscrito:** es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente (ver figura 1.11).
- 11) **Ángulo exterior:** es el que tiene su vértice afuera de la circunferencia y está formado por dos tangentes, o por una tangente y una secante, o por dos secantes.

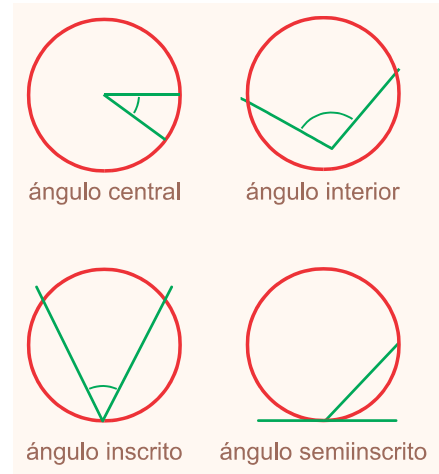


figura 1.11

PROPIEDADES

- 1) *Toda tangente es perpendicular al radio trazado desde el punto de tangencia* (ver figura 1.12).
- 2) *La mediatriz de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia* (ver figura 1.13).
- 3) *Un diámetro perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y a sus arcos correspondientes.*
- 4) *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, cuerdas iguales equidistan del centro.*

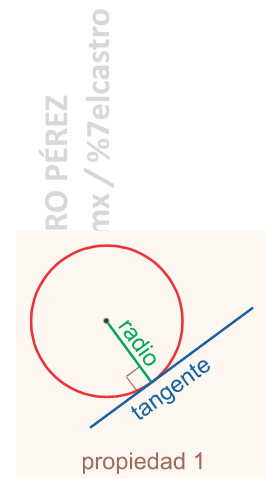
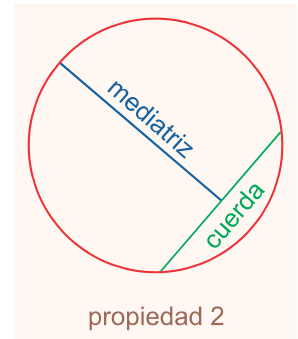


figura 1.12

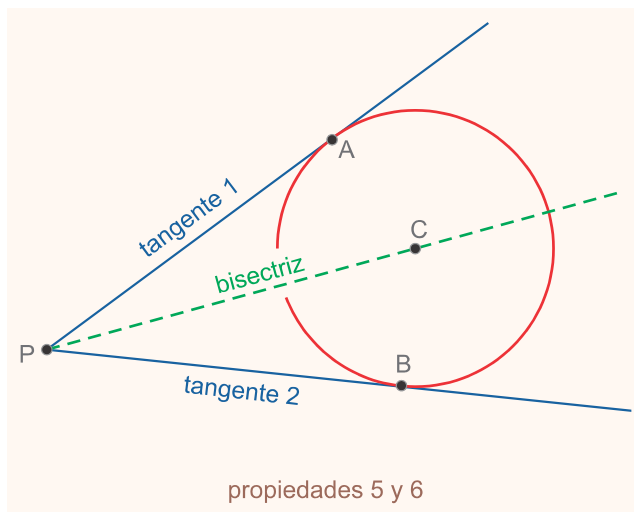
² Es frecuente encontrar a autores de libros que escriben *dos rectas de intersectan* en vez de *dos rectas se intersectan*. El verbo *intersectar* no existe en el idioma Español; el verbo *intersecar*, sí, el cual proviene de las raíces latinas *inter* = entre ellos; y de *secare* = que cortan. Es decir, intersecar significa que se cortan entre sí. Es un verbo regular y se conjuga como el verbo PESCAR.

- 5) *Al trazar dos tangentes desde un mismo punto exterior P a una circunferencia, los segmentos que van desde dicho punto P a los puntos de tangencia A y B son iguales.* Verlo en la figura 1.14.
- 6) *La recta que une un punto exterior P con el centro C de una circunferencia, es bisectriz del ángulo formado por las tangentes desde ese punto a la circunferencia.* Verlo en la figura 1.14.



propiedad 2

figura 1.13



propiedades 5 y 6

figura 1.14