7 LA ELIPSE

7.1 DEFINICIONES

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos , es constante.

En la figura 7.1, los focos están representados por los puntos f_1 y f_2. En una elipse, si se suman las distancias $d_1 + d_2$ se obtiene un valor constante sin importar la ubicación del punto p.

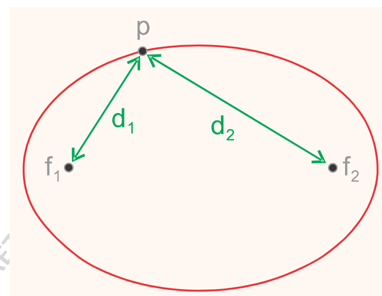

figura 7.1

Por esa razón es fácil trazar una elipse: se clavan un par de alfileres en el sitio de los focos, se amarra un cordel que pase por esos dos alfileres y que quede un tanto flojo. Luego con un lápiz, como lo muestra la figura 7.2, se tensa el cordel y se va desplazando dicho lápiz sobre el papel.

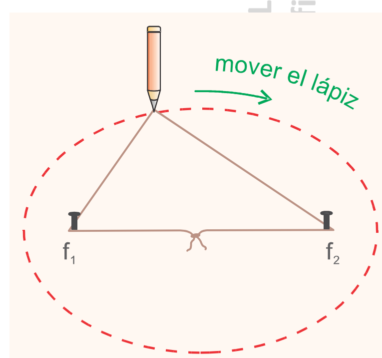

figura 7.2

Se obtiene una elipse porque la longitud del cordel amarrado es siempre la misma, no importa en dónde se encuentre el lápiz. Si a dicha longitud se le resta la distancia también constante que hay entre ambos focos, se obtiene un segmento de cordel de longitud constante, que es la suma de las longitudes de cada foco al lápiz. Concuerda justamente con la definición de elipse.

La simbología que se utiliza para representar las partes fundamentales de la elipse es la siguiente:

* La letra *a* representa la distancia que hay desde el centro hasta el extremo de la elipse por su parte más alargada. Ver la figura 7.3.

* La letra b representa la distancia que hay desde el centro hasta el extremo de la elipse por su parte más achatada o corta.

* La letra c representa la distancia que hay desde el centro hasta cada foco.

Las características o partes principales de una elipse son (ver figura 7.3):

* *Vértices*: Son los puntos extremos más alejados del centro.

* *Eje mayor*: Es la distancia de un vértice hasta el otro y equivale a $2a$.

* *Eje menor*: Es la distancia de extremo a extremo medida por su parte más angosta y equivale a $2b$.

* *Distancia focal*: Es la distancia que hay de un foco al otro foco y equivale a $2c$.

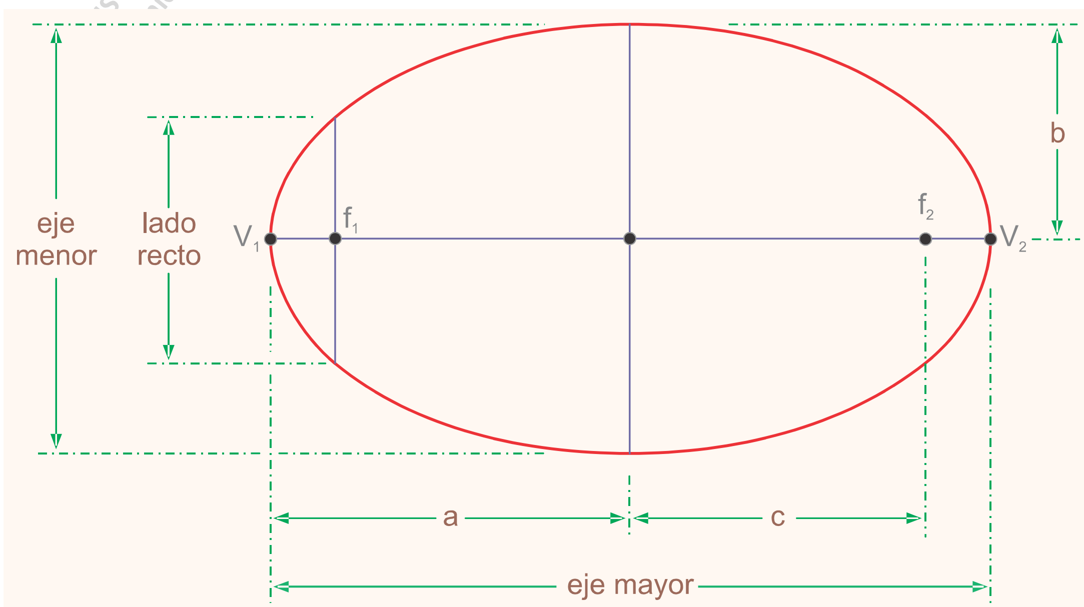

figura 7.3

* La posición del centro, cuyas coordenadas son (h, k). Para evitar confusiones con la distancia del centro al foco a la que se le nombró con la letra c minúscula, al centro de la elipse se le asigna la letra O (mayúscula).

* *Lado recto*: Es la cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el foco.

Hay dos posibilidades de obtener una elipse: horizontal o vertical.

A partir de las coordenadas del centro (h, k), de la longitud del semieje mayor a y de la longitud del semieje menor b se pueden obtener o deducir todas las características anteriores, las cuales están dadas en la ecuación particular de la elipse, que de hecho son dos, según se trate de una elipse horizontal o de una elipse vertical.

La ecuación particular de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{si el eje focal es horizontal}$$

o bien

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \text{si el eje focal es vertical}$$

en donde debe cumplirse que $a > b$

Para saber si se trata de una elipse horizontal o una elipse vertical, basta comparar los dos denominadores de la ecuación particular. Como $a > b$, el denominador mayor debe ser a^2. El eje mayor es paralelo al eje de la variable en donde está a.

Igual que en las anteriores cónicas que tienen términos al cuadrado, h significa el desplazamiento horizontal del centro y k el desplazamiento vertical del centro. El significado de las letras a y b de los denominadores están definidos en la figura 6.3.

Existe una relación entre las tres constantes a, b y c, que a partir del teorema de Pitágoras está dada por la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$

de donde, despejando cada literal, se obtiene:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Otra característica interesante de la elipse es que la *longitud del lado recto* mide

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

en donde las letras a y b que aparecen, son las mismas definidas anteriormente.

Finalmente, una medida interesante es la llamada excentricidad, denotada por la letra e. *Excéntrico* en este caso significa *fuera del centro*. Se refiere a qué tan lejos del centro de la elipse se encuentran los focos en proporción al tamaño de dicha elipse. Para comprender mejor este concepto basta darse cuenta que en una elipse mientras más se alejen los focos del centro, la forma de dicha elipse es más alargada (ver figura 7.4, inciso a); conforme los focos se acercan al centro, es decir, conforme el calor de c se hace más pequeño, la elipse se aproxima a una circunferencia (ver figura 7.4, inciso b); y finalmente, cuando los focos coinciden con el centro, o sea que $c = 0$, la elipse se convierte en una circunferencia (ver figura 7.4, inciso c).

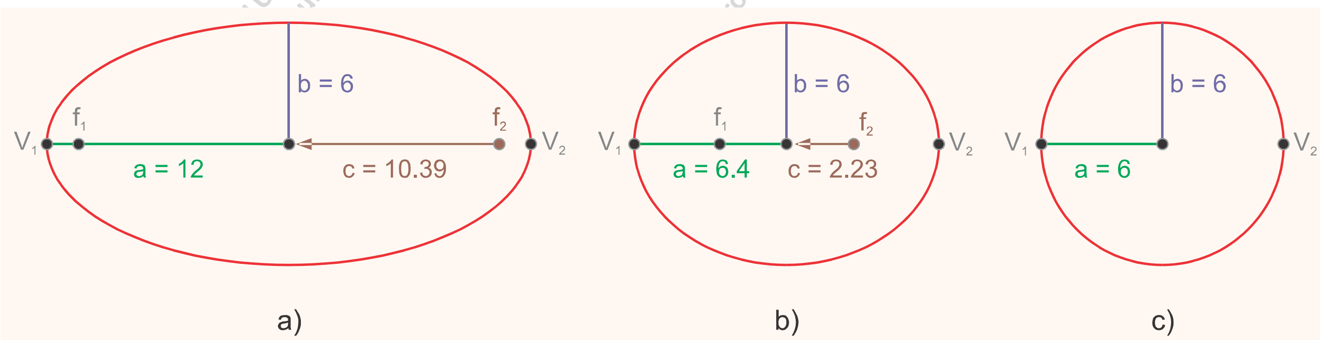

figura 7.4

Analíticamente puede verse a través de la relación de las constantes a, b y c. Si los focos coinciden con el centro, significa que $c = 0$. Entonces

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = b^2 + 0$$
$$a^2 = b^2$$

de donde

$$a = b$$

Si a es el semieje mayor y b es el semieje menor, al ser iguales cuando los focos coinciden con el centro, se convierten ambos semiejes en el radio de una circunferencia.

La excentricidad se mide a través de la proporción $e = \dfrac{c}{a}$. La escala posible de medición de la excentricidad va de cero a uno, es decir, $0 \le e < 1$. Si $e = 0$ (se necesita que $c = 0$) se trata de una circunferencia. Mientras más cercano esté el valor de e al cero, más cercana estará la elipse de una circunferencia. Por el contrario, mientras más se aproxime e al valor de 1, más alargada estará acercándose a la línea recta.

7.2 TRANSFORMACIONES

Dar, por medio de una regla, como se hizo en el caso de la circunferencia y de la parábola, el procedimiento para transformar de la ecuación general a la particular, en el caso de la elipse resulta muy extenso; de manera que, por esa razón, se va a mostrar dicho proceso a través de un ejemplo.

Ejemplo 1: La ecuación general de una elipse es $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$. Transformarla a su ecuación particular y esbozar su gráfica.

Solución: Para tratar de dar claridad a la explicación, se hará por pasos la transformación pedida.

PASO 1: *Se agrupan en el lado izquierdo los términos que contengan a las mismas variables y se escribe en el lado derecho la constante sola:*

$$\left(4x^2 - 16x\right) + \left(9y^2 + 18y\right) = 11$$

PASO 2: *Se factoriza en cada grupo el coeficiente del término al cuadrado:*

$$4\left(x^2 - 4x\right) + 9\left(y^2 + 2y\right) = 11$$

PASO 3: *Se completa un trinomio cuadrado perfecto en cada grupo, añadiendo al lado derecho la misma cantidad agregada en el izquierdo:*

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) + 9\left(y^2 + 2y + 1\right) = 11 + 16 + 9$$

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) + 9\left(y^2 + 2y + 1\right) = 36$$

NOTA: Se agregó 16 en el lado derecho porque es el 4 que se agregó adentro del primer paréntesis, el cual está multiplicado todo por 4; de la misma forma, en el segundo paréntesis se agregó adentro un 1, pero como está multiplicado por 9, en realidad fue 9 en total lo que se agregó.

PASO 4: *Se factorizan los dos paréntesis:*

$$4\left(x - 2\right)^2 + 9\left(y + 1\right)^2 = 36$$

PASO 5: *Se dividen ambos lados de la igualdad entre* 36 *(para que quede igual a* 1 *en el lado derecho, ya que así es la forma de la ecuación particular) y se simplifica:*

$$\frac{4(x-2)^2}{36}+\frac{9(y+1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1}$$

donde $a^2=9$ (por ser el denominador mayor) y $b^2=4$; por lo tanto, se trata de una elipse horizontal, ya que el denominador mayor está bajo la variable x.

De esta ecuación se deducen los valores de:

- $h=2$. Se obtiene del binomio $(x-2)^2$ de la ecuación particular;
- $k=-1$. Se obtiene del binomio $(y+1)^2$ de la ecuación particular;
- El centro está en $O(2,-1)$;
- Si $a^2=9$ y $b^2=4$ obtenidos a partir de los denominadores en la ecuación particular, se deduce que $a=3$ y $b=2$. Y por la relación de las constantes a, b y c, se calcula que la distancia semivocal es

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{9-4}\approx 2.23 \quad \text{(aproximadamente)}$$

- La longitud del lado recto de esta elipse se calcula con la relación

$$lr=\frac{2b^2}{a}$$

$$lr=\frac{2(2)^2}{3}\approx 2.6 \quad \text{(aproximadamente)}$$

- La excentricidad es

$$e=\frac{c}{a}$$

$$e = \frac{2.23}{3}$$

$$e = 0.743$$

La figura 7.5 muestra los detalles de la elipse.

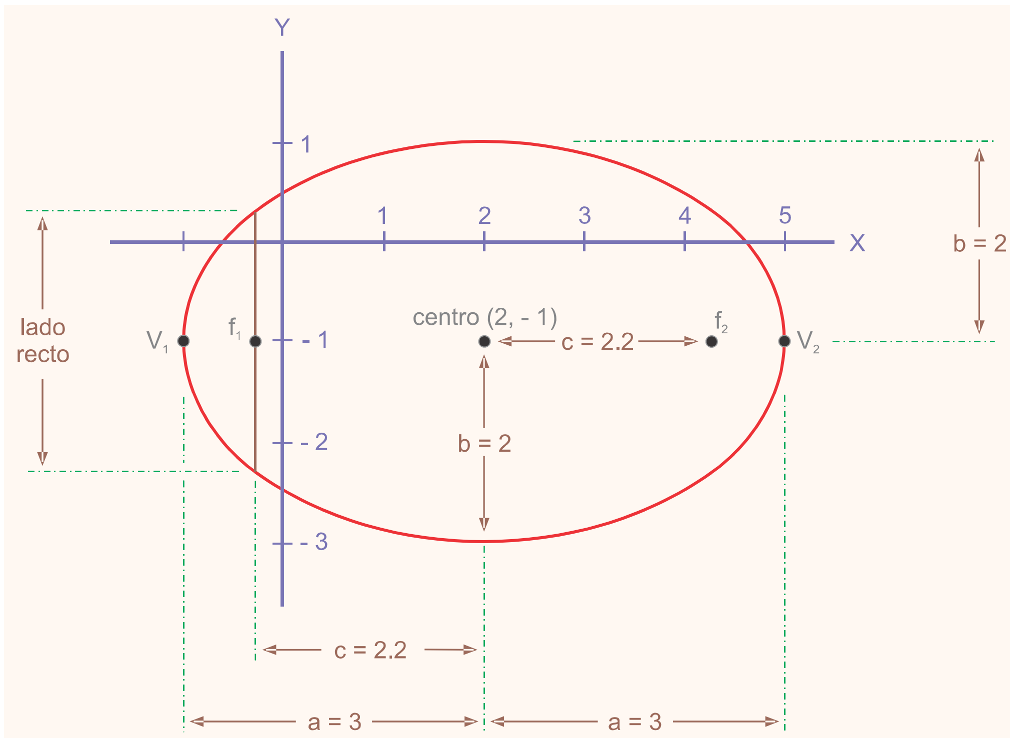

figura 7.5

Si $a = 3$ es la distancia del centro a los vértices, a partir del centro deben contarse tres unidades a la izquierda y tres a la derecha para obtener las coordenadas de los vértices. Son:

$$V_1\left(2-3, -1\right) = V_1\left(-1, \; -1\right)$$

$$V_2\left(2+3, \; -1\right) = V_2\left(5, -1\right)$$

La longitud del eje mayor es $2a = 6$; la del eje menor es $2b = 4$.

Para obtener las coordenadas de cada foco, de manera semejante a los vértices, como $c = 2.23$ es la distancia del centro a cada foco, a partir del centro deben contarse 2.23 unidades a la izquierda y 2.23 a la derecha, esto significa que para el foco f_1 debe restarse $2 - 2.23$ mientras que para el foco f_2 debe sumarse $2 + 2.23$. Por lo tanto, las coordenadas de los focos son

$$f_1\left(2-2.23,\,-1\right)=f_1\left(-0.23,\,-1\right)$$
$$f_2\left(2+2.23,\,-1\right)=f_2\left(4.23,\,-1\right)$$

Ejemplo 2: Transformar a su ecuación general la ecuación particular de la elipse

$$\frac{(x+4)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

Solución: Para eliminar los denominadores debe multiplicarse toda la igualdad por el producto de los dos denominadores, es decir, por 196. Haciéndolo, se obtiene:

$$196\left(\frac{(x+4)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{4}\right)=196(1)$$

$$4(x+4)^2+49(y-2)^2=196$$

elevando al cuadrado los binomios indicados:

$$4\left(x^2+8x+16\right)+49\left(y^2-4y+4\right)=196$$

haciendo las multiplicaciones indicadas:

$$4x^2+32x+64+49y^2-196y+196=196$$

finalmente, escribiendo todo al lazo izquierdo y reduciendo términos semejantes se llega a:

$$4x^2+32x+64+49y^2-196y+196-196=0$$

$$\boxed{4x^2+49y^2+32x-196y+64=0}$$

Ejemplo 3: De la siguiente elipse, hallar las coordenadas de sus vértices y sus focos, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas del centro, la longitud del lado recto, la excentricidad y esbozar su gráfica:

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

Solución: El denominador mayor es 25 y como está bajo el numerador que contiene a la variable *ye*, significa que se trata de una elipse vertical. Así que en este caso se tiene que

$$a^2 = 25 \quad , \quad \text{de donde} \quad a = 5$$

$$b^2 = 9 \quad , \quad \text{de donde} \quad b = 3$$

por lo tanto, la semidistancia focal es

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

y además $h = 1$ y $k = -2$.

La figura 7.6 es un esbozo de la gráfica, la cual es muy útil para ayudarse con ella a sacar los valores de las coordenadas solicitadas.

Para obtener dicha gráfica se marca primero el punto correspondiente al centro de la elipse cuyas coordenadas son h y k, es decir, $O(1, -2)$. A continuación, a las ordenada del centro $k = -2$ se le agrega para arriba y para abajo (ya que se trata de una elipse vertical) el valor calculado de $c = 4$, en virtud de que la distancia del centro a los focos está dada por c, obteniéndose así las coordenadas de los focos, o sea $f_1(1, 2)$ y $f_2(1, -6)$. Igualmente, sumándole y restándole a la ordenada del centro el valor de $a = 5$, se obtienen las coordenadas de los vértices, o sea $V_1(1, 3)$ y $V_2(1, -7)$. Finalmente, como el eje mayor es igual a $2a$, entonces su longitud es 10 y como el eje menor es igual a $2b$, su longitud es 6.

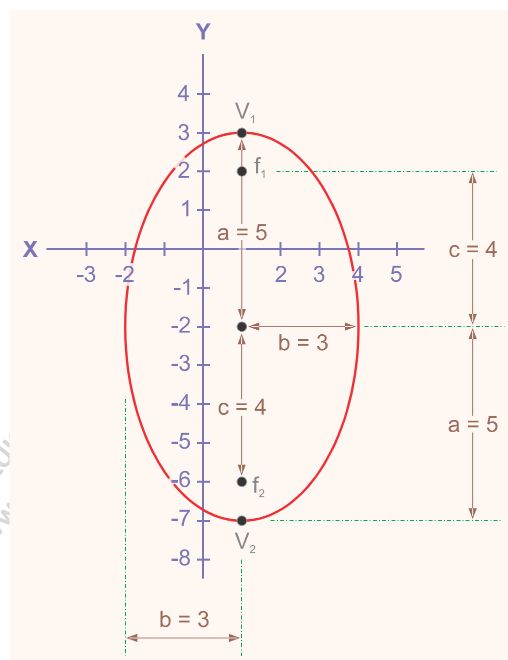

figura 7.6

Ejemplo 4: La longitud del lado recto de una elipse mide 16/3. Hallar su ecuación sabiendo que las coordenadas de sus vértices son $V_1(-3, 6)$ y $V_2(-3, -6)$. Calcular las coordenadas de sus focos y esbozar la gráfica.

Solución: El centro tiene que estar ubicado a la mitad de los dos vértices. Haciendo una gráfica con las coordenadas de los vértices (ver figura 7.7), se deduce fácilmente que el centro está en $O(-3,\ 0)$, es decir que $h = -3$ y $k = 0$; además, se trata de una elipse vertical.

Por otra parte, basta medir la distancia que hay entre los dos vértices y la mitad será el valor correspondiente de a. Como desde $y_1 = 6$ hasta $y_2 = -6$ hay una distancia de 12, entonces $a = 6$.

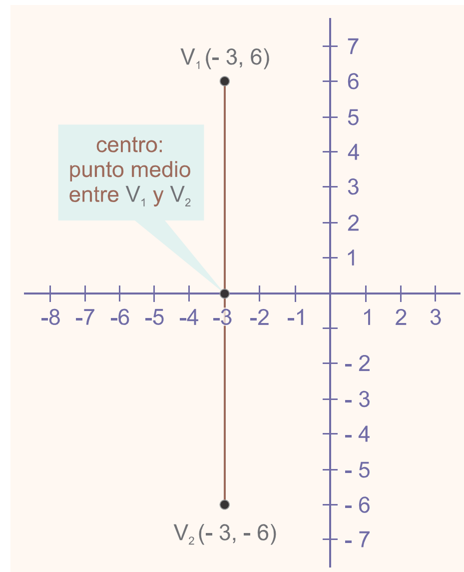

figura 7.7

Con el valor del lado recto dado desde el enunciado del problema y con el de $a = 6$, se puede establecer que

$$lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{16}{3} \quad \text{, donde } a = 6$$

sustituyendo y despejando, se obtiene:

$$\frac{2b^2}{6} = \frac{16}{3}$$

$$b^2 = \frac{16(6)}{3(2)}$$

$$b^2 = 16$$

$$b = 4$$

Sustituyendo los valores en la ecuación particular, se llega a la ecuación pedida:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{4^2} + \frac{(y+0)^2}{6^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1}$$

La semidistancia focal es $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, o sea

$$c = \sqrt{36 - 16}$$
$$c \approx 4.47 \qquad \text{(aproximadamente)}$$

De donde se deduce, agregando para arriba y para abajo esta cantidad a partir del centro, que las coordenadas de los focos son $f_1(-3\,;\,4.47)$ y $f_2(-3\,;\,-4.47)$. Finalmente, su excentricidad es

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{4.47}{6} \approx 0.745$$

La figura 7.8 muestra la gráfica de esta elipse.

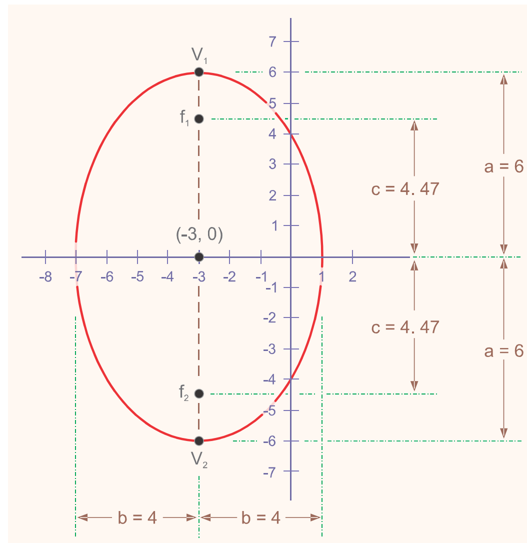

figura 7.8

Ejemplo 5: Una elipse horizontal con centro en el origen tiene una excentricidad $e = 0.866$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(-3.464\,;\,0)$ y $f_2(3.464\,;\,0)$. Hallar la ecuación de dicha elipse y esbozar su gráfica.

Solución: Inicialmente conviene graficar los datos del enunciado, en este caso los focos y el centro, los cuales se muestran en la figura 7.9. Recordando que la distancia del centro de una elipse a cualquiera de los focos es *c*, se tiene entonces que $c = 3.464$. Además, como el centro está en el origen, se desprende que $h = 0$ y $k = 0$.

Por otra parte, sabiendo que la excentricidad está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a}$$

con los valores de e y de c se obtiene que

$$0.866 = \frac{3.464}{a}$$

de donde

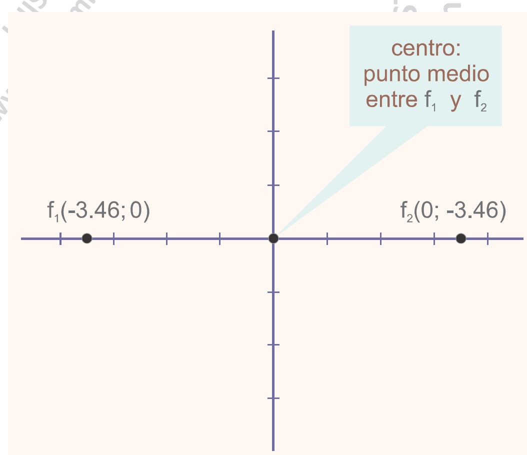

figura 7.9

$$a = \frac{3.464}{0.866} = 4\,.$$

Conociendo los valores de las constantes $a = 4$ y $c = 3.464$ se calcula el de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{4^2 - 3.464^2}$$
$$b = 2$$

Por lo tanto, su ecuación es

$$\frac{(x-0)^2}{4^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

La gráfica se muestra en la figura 7.10:

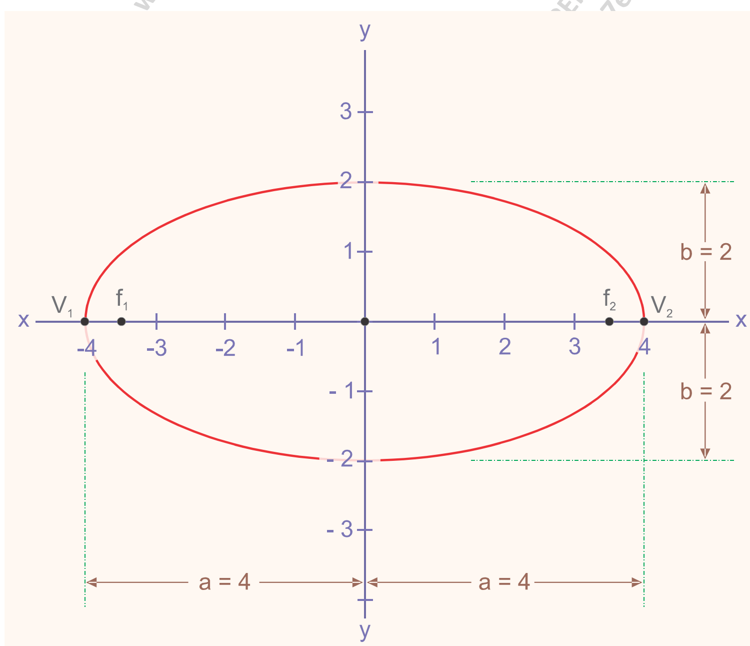

figura 7.10

EJERCICIO 7.1

Transformar a la forma particular las siguientes ecuaciones de elipses:

1) $4x^2 + y^2 + 8x + 6y - 3 = 0$

2) $25x^2 + 4y^2 - 150x + 8y + 129 = 0$

3) $x^2 + 4y^2 + 4x + 32y + 32 = 0$

4) $25x^2 + 64y^2 - 350x + 1024y + 3721 = 0$

5) $9x^2 + 16y^2 + 162x - 32y + 601 = 0$

6) $x^2 + 25y^2 - 22x + 150y + 321 = 0$

7) $25x^2 + 36y^2 + 100x + 72y - 764 = 0$

8) $16x^2 + y^2 - 192x + 14y + 545 = 0$

Transformar a su ecuación general las siguientes elipses:

9) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

10) $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-8)^2}{9} = 1$

11) $\frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y+7)^2}{4} = 1$

12) $\frac{(x+9)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{49} = 1$

13) $\frac{(x+8)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

14) $\frac{(x-11)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

15) $\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

16) $\frac{(x+5)^2}{81} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$

En los siguientes problemas hallar la ecuación de la elipse y todos sus elementos restantes:

17) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(1, 11)$ y $V_2(1, -15)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(1, 10)$ y $f_2(1, -14)$.

18) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(-10, 2)$ y $V_2(16, 2)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(-2, 2)$ y $f_2(8, 2)$.

19) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(-4, 0)$ y $V_2(16, 0)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(0, 0)$ y $f_2(12, 0)$.

20) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(-2, 8)$ y $V_2(-2, -2)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(-2, 7)$ y $f_2(-2, -1)$.

21) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(13, 0)$ y $V_2(-17, 0)$ y la longitud de su lado recto es $288/15$.

22) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(-9, 1)$ y $V_2(17, 1)$ y la longitud de su lado recto es $288/13$.

23) Las coordenadas de los vértices de una elipse son $V_1(4, 15)$ y $V_2(4, -25)$ y la longitud de su lado recto es $128/5$.

24) Las coordenadas de los focos de una elipse son $f_1(1, 5)$ y $f_2(1, -3)$ y la longitud de su eje menor es 6.

25) Las coordenadas de los focos de una elipse son $f_1(-10, -2)$ y $f_2(0, -2)$ y la longitud de su eje mayor es 26.

26) Las coordenadas de los focos de una elipse son $f_1(-5, 0)$ y $f_2(5, 0)$ y la longitud de su eje menor es 8.

27) Las coordenadas del centro de una elipse son $O(3, -1)$, la de uno de sus focos es $f_2(15, -1)$ y la longitud de su eje menor es 10.

28) Las coordenadas del centro de una elipse son $O(0, 2)$, la de uno de sus focos es $f_2(5, 2)$ y la longitud de su eje mayor es 26.

29) Las coordenadas del centro de una elipse son $O(-7, 5)$, la de uno de sus focos es $f_2(8, 5)$ y la longitud de su eje mayor es 25.

PROBLEMAS ESPECIALES

30) Una elipse vertical tiene sus focos sobre la circunferencia $(x-3)^2+(y-2)^2=49$ y las coordenadas de uno de sus vértices son $V_1(3, 10)$. Hallar la ecuación de la elipse.

31) Una elipse horizontal tiene sus vértices sobre la circunferencia $(x+1)^2+(y-4)^2=81$ y las coordenadas de uno de sus focos son $f_1(5, 4)$. Hallar la ecuación de la elipse.

32) La longitud del eje mayor de una elipse es 78 y su excentricidad es $e=\dfrac{12}{13}$. Sabiendo que se trata de un elipse horizontal con centro en el origen, hallar su ecuación.

7.3 INSTRUCCIONES PARA CONSTRUIR UNA ELIPSE CON PAPEL

1) En una hoja tamaño carta de papel albanene, trazar una circunferencia que abarque al máximo la hoja. Marcar el centro de dicha circunferencia (ver figura 7.11).

2) Dibujar un punto entre 1.5 cm y 2 cm por adentro de la circunferencia (ver figura 7.11).

3) Doblar la hoja por la parte posterior, de manera que la línea de la circunferencia trazada en el paso1 coincida con el punto del paso 2 (ver figura 7.12). Marcar bien el doblez.

4) Repetir el proceso anterior haciendo coincidir ahora otro punto de la circunferencia del paso 1 con el punto del paso 2.

5) Continuar así hasta llenar de dobleces la hoja.

6) Una vez concluida la construcción de la elipse a base de dobleces, el alumno deberá de manera intuitiva deducir cuáles son los dos focos de dicha elipse.

7) La figura 7.13 muestra el trabajo terminado.

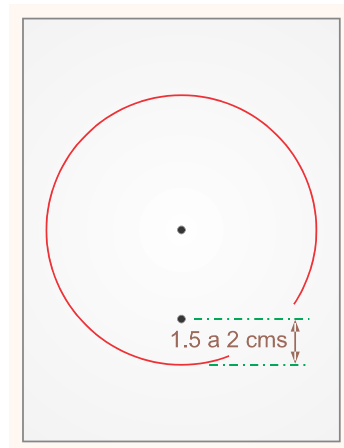

figura 7.11

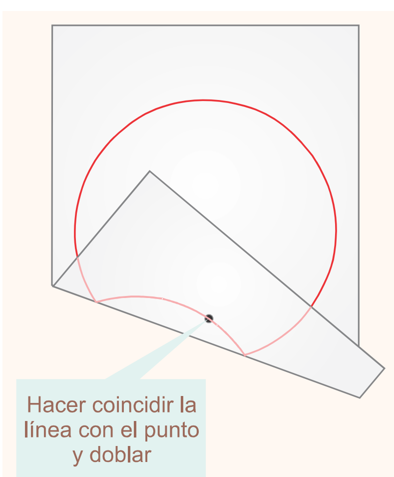

figura 7.12

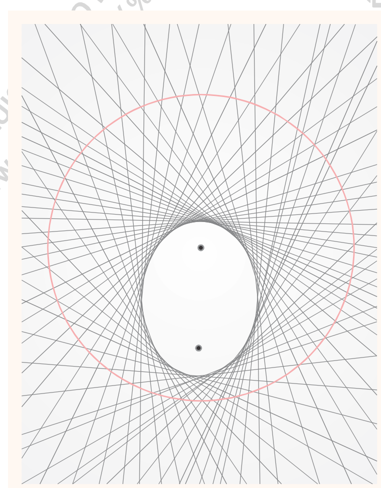

figura 7.13