TEMA 13

DETERMINANTES

13.1 ***Un determinante*** *es un arreglo numérico en igual número de filas que de columnas del que, a partir de ciertas reglas, se forma un polinomio*. El símbolo es un par de barras verticales (no oblicuas) que encierran a los elementos. El orden de un determinante es el número de filas o columnas que contenga.

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ es un determinante de tres filas y tres columnas.

Al hablar de polinomio se está haciendo mención a una suma algebraica de dos o más términos, ya que eso es un polinomio, los cuales, a su vez, están formados por el producto de dos o más elementos de la matriz cuadrada.

Las reglas aludidas en la definición son dos: una que se refiere a la manera de formar cada término del polinomio a construirse; la otra se refiere a los signos. Cada una de ellas un poco más adelante se mencionará y explicará, aunque la regla 2 quedará expuesta cuando se hable de los cofactores.

El *orden de un determinante* está dado por el número de filas o columnas que contenga. Así, un determinante de segundo orden consta de dos filas y dos columnas; un determinante de tercer orden consta de tres filas y tres columnas; un determinante de cuarto orden consta de cuatro filas y cuatro columnas; y así sucesivamente.

REGLA 1: La regla básica para construir el polinomio al que se refiere la definición es que el producto que forma cada término debe estar formado por la multiplicación de un solo elemento de cada fila y de cada columna de la matriz.

Por ejemplo, si se tiene el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Para formar un término cualquiera, supóngase que se escoge el elemento $\boldsymbol{f}$, el cual pertenece a la segunda fila y a la tercera columna; esto significa que para escoger el segundo factor de ese término que se desea construir, ya no deberá pertenecer ni a la segunda fila ni a la tercera columna. En otras palabras, quedan descartados los elementos d, e, f (de la segunda fila) y c, f, i (de la tercera columna).

$$\begin{vmatrix} a & b & \boxed{\cancel{c}} \\ \boxed{\cancel{d}} & \boxed{\cancel{e}} & f \\ g & h & \boxed{\cancel{i}} \end{vmatrix}$$

Elementos descartados pertenecientes a la misma fila y misma columna de $\boldsymbol{f}$.

Quedan cuatro posibilidades: que la $\boldsymbol{f}$ escogida se multiplique por la a, la b, la g o la h. Se puede escoger cualquiera. Supóngase que se escoge la h. En este momento se lleva el polinomio $f\,h$. Ahora debe escogerse un elemento que no esté en la misma fila ni en la misma columna de h. La única queda es la a. De manera que el polinomio resultante es $f\,h\,a$.

Si se continúa así formando todos los términos posibles bajo la regla que no se repita ninguno de la fila y columna al que pertenezcan los anteriores, se obtiene el polinomio que se llama *determinante*, faltando solamente por definir cuáles son positivos y cuáles negativos.

Como construir el polinomio de esta manera resulta muy laborioso y con alto riesgo de error por omisión, ya en forma mecanizada se puede establecer una regla para calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada. Para eso son necesarias las siguientes definiciones:

13.2 MENOR DE UN ELEMENTO: *Es el determinante que se obtiene de eliminar la fila y la columna en donde se encuentra dicho elemento.*

Por ejemplo, si se tiene el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

el menor del elemento f es el determinante que se obtiene de eliminar la fila y la columna en donde se encuentra f, es decir

$$\text{menor de } f = \begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

13.3 COFACTOR DE UN ELEMENTO a_{ij}: *El cofactor*[1] de un elemento a_{ij} es el producto de su menor por $(-1)^{i+j}$.

En otras palabras, a cada *menor* de cada elemento de un determinante le corresponde un signo, el cual depende de la fila y la columna en la que esté. Los signos van alternados de la siguiente forma

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, el cofactor del elemento f del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

como está situado en la segunda fila y en la tercera columna, entonces $i = 2$, $j = 2$, de manera que resulta que $(-1)^{i+j} = (-1)^{2+2} = +1$, o sea, le corresponde signo positivo a su *menor*, lo cual es igual a

[1] El prefijo **"CO"** viene de la preposición latina **"cum"** y se emplea en el idioma Español para dar idea de algo que actúa **"junto con.... en común"**. Por ejemplo, la palabra **"coincidir"** significa **"incidir al mismo tiempo"**; la palabra **"coterráneo"** significa que es de la misma tierra (o país). En determinantes, todo elemento a_{ij} tiene asociados a él mismo dos factores: uno es su **"menor"**, el otro es $(-1)^{i+j}$. De allí se deriva la palabra **co**factor.

$$\text{cofactores de } f = + \begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

Desarrollar una fila o columna de un determinante significa sumar cada uno de los cofactores que resultan de tomar uno a uno los elementos de dicha fila o columna.

13.4 VALOR DE UN DETERMINANTE: *Es la suma que se obtiene al desarrollar cualquier fila o cualquier columna en sus cofactores.*

Ejemplo 3: Desarrollar por sus cofactores de la tercera fila el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{tercera fila} \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{6} \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4: Obtener el valor del siguiente determinante desarrollándolo por sus cofactores de la segunda columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 5 & 8 \\ 11 & 1 & 4 & 13 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{0} & 10 & 4 \\ 3 & \boxed{2} & 6 & 7 \\ 9 & \boxed{12} & 5 & 8 \\ 11 & \boxed{1} & 4 & 13 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \\ 11 & 4 & 13 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 9 & 5 & 8 \\ 11 & 4 & 13 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 11 & 4 & 13 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 0(-208) + 2(-300) - 12(264) + 1(260) \\ &= -3508 \end{aligned}$$

EJERCICIO 13.1

1) Obtener el valor del siguiente determinante, desarrollándolo por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Obtener el valor del siguiente determinante, desarrollándolo por la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

3) Obtener el valor del siguiente determinante, desarrollándolo por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 9 & -2 \\ 9 & -6 & 3 & 10 \\ -8 & 7 & -6 & -5 \end{vmatrix}$$

4) Obtener el valor del siguiente determinante, desarrollándolo por la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 8 & -6 & 6 & -8 \\ 5 & -1 & 9 & 11 \\ -9 & -6 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

13.5 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Por lo anterior es fácil imaginar que cuando se tenga que calcular el valor de un determinante, por ejemplo, de 5º orden, al desarrollarlo por sus cofactores se reducirá a una suma de determinantes de cuarto orden; éstos, a su vez, para calcularse deberán reducirse a determinantes de tercer orden, y así sucesivamente, lo cual resulta altamente laborioso y engorroso.

Conocer y aplicar ciertas propiedades de los determinantes favorece enormemente ese trabajo, el cual consiste en transformar todos los elementos, excepto uno, de una fila o una columna en ceros, ya que de esta manera al desarrollar esa fila o columna por sus cofactores, todos los determinantes se anularán, menos uno.

1) *Si se intercambian dos filas entre sí, o dos columnas, el signo del valor del determinante cambia.*

Por ejemplo, el valor del determinante superior de la derecha es igual a 155, en cambio el del inferior es igual a - 155 ya que se intercambiaron la primera con la tercera columnas respectivamente. Nótese que lo único que cambia es el signo, no el valor del determinante que en ambos casos siguió siendo, en valor absoluto, igual a 155.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 155$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -155$$

2) *Si dos columnas, o filas, son iguales, el valor del determinante es igual a cero.*

Por ejemplo, el determinante de la derecha es igual a cero, ya que la primera y la tercera filas son iguales.

son iguales
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3) *Si todos los elementos de una fila, o columna, se multiplican por k, el valor del determinante queda también multiplicado por k.*

Por ejemplo, en el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 155$$

si toda la segunda columna se multiplica por 3, su valor es

$$\begin{vmatrix} 5 & (2\times 3) & 1 \\ 3 & (7\times 3) & 8 \\ 2 & (1\times 3) & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 21 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 155 \times 3 = 465$$

4) *El valor de un determinante no cambia si una columna se sustituye por esa columna más un múltiplo de otra columna. Para las filas también se cumple.*

Por ejemplo, en el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 155$$

si la segunda columna se sustituye por el resultado de sumar a ella misma el triple de la tercera, el determinante que resulta sigue valiendo 155, es decir que

$$\begin{vmatrix} 5 & [2+3(1)] & 1 \\ 3 & [7+3(8)] & 8 \\ 2 & [1+3(6)] & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 31 & 8 \\ 2 & 19 & 6 \end{vmatrix} = 155.$$

primera
columna original

segunda columna original

Esta última propiedad es la más importante en cuanto a su utilización, ya que si se aplica repetidamente a un determinante, puede lograrse que los elementos de una fila, o columna, se hagan cero, excepto uno. Conseguir lo anterior elimina muchos cálculos a la hora de tratar de obtener el valor de un determinante directamente por su desarrollo en cofactores.

Ejemplo 5: Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 5 & 8 \\ 11 & 1 & 4 & 13 \end{vmatrix}$.

Solución: Desarrollando el determinante por los cofactores de la segunda columna, se obtiene que el determinante original es igual a

$$-\,2\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7\\ 9 & 5 & 8\\ 11 & 4 & 13\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 10 & 4\\ 9 & 5 & 8\\ 11 & 4 & 13\end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 2 & 10 & 4\\ 3 & 6 & 7\\ 11 & 4 & 13\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 10 & 4\\ 3 & 6 & 7\\ 9 & 5 & 8\end{vmatrix}$$

Resolver cada uno de esos determinantes es muy laborioso. Resulta más simple convertir en ceros una fila, o columna, antes de desarrollar por cofactores. En todos los casos es más sencillo escoger la fila, o columna, en donde haya un 1 para luego los demás elementos de esa fila, o columna, convertirlos en ceros. En este ejemplo, existe un 1 en la cuarta fila o en la segunda columna.

columna pivote

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 4\\ 3 & 2 & 6 & 7\\ 9 & 12 & 5 & 8\\ 11 & 1 & 4 & 13\end{vmatrix}$$

a convertir en ceros

Escogiendo la cuarta fila para convertirla en ceros, implica que la segunda columna se toma como pivote, es decir que va a ser la única columna que al final va a quedar igual que la original sin sufrir modificación alguna.

Aplicando a cada columna la propiedad (4) de los determinantes, se obtiene lo que se muestra en los siguiente pasos:

Operaciones con la primera columna:

Para convertir el elemento 11 en un cero debe restársele 11, lo cual se consigue al sustituir ese 11 de la primera columna original por la suma de él mismo más la columna pivote (en este caso 2ª columna) multiplicada por (- 11), como se muestra a la derecha.

1ª columna original		columna pivote (2ª)		1ª columna del nuevo determinante
2	+	$2\times(-11)$	=	- 20
3	+	$2\times(-11)$	=	- 19
9	+	$12\times(-11)$	=	- 123
11	+	$1\times(-11)$	=	0

El elemento 11 se convirtió en cero

Operaciones con la tercera columna:

Para convertir el elemento 4 de la cuarta fila, tercera columna, en un cero debe restársele 4, lo cual se consigue multiplicando la 2ª columna original (columna pivote) por (- 4) y sumándola a esa tercera columna original, como se muestra a la derecha.

1ª columna original		columna pivote (2ª)		3ª columna del nuevo determinante
10	+	$2\times(-4)$	=	2
6	+	$2\times(-4)$	=	- 2
5	+	$12\times(-4)$	=	- 43
4	+	$1\times(-4)$	=	0

El elemento 4 se convirtió en cero

Operaciones con la cuarta columna:

Para convertir el elemento 13 de la cuarta fila, cuarta columna, en un cero debe restársele 13, lo cual se consigue multiplicando la 2ª columna original (columna pivote) por (- 13) y sumándola a esa cuarta columna original, como se muestra a la derecha.

$$\begin{array}{ccccc} \text{4ª columna original} & & \text{columna pivote (2ª)} & & \text{4ª columna del nuevo determinante} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 4 & + & 2\times(-13) & = & -22 \\ 7 & + & 2\times(-13) & = & -19 \\ 8 & + & 12\times(-13) & = & -148 \\ 13 & + & 1\times(-13) & = & 0 \end{array}$$

El elemento 13 se convirtió en cero

Así que el determinante original es igual a

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 5 & 8 \\ 11 & 1 & 4 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & 2 & 2 & -22 \\ -19 & 2 & -2 & -19 \\ -123 & 12 & -43 & -148 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante, equivalente al original, por los cofactores de la cuarta fila, se obtiene que:

$$\begin{vmatrix} -20 & 2 & 2 & -22 \\ -19 & 2 & -2 & -19 \\ -123 & 12 & -43 & -148 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -0\begin{vmatrix} 2 & 2 & -22 \\ 2 & -2 & -19 \\ 12 & -43 & -148 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -20 & 2 & -22 \\ -19 & -2 & -19 \\ -123 & -43 & -148 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -20 & 2 & -22 \\ -19 & 2 & -19 \\ -123 & 12 & -148 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -20 & 2 & 2 \\ -19 & 2 & -2 \\ -123 & 12 & -43 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que se tienen así tres determinantes multiplicados por cero, por lo que se anulan, y el otro multiplicado por uno, elemento neutro de la multiplicación, de tal manera que bajo este proceso, el determinante original es igual simplemente a

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 5 & 8 \\ 11 & 1 & 4 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & 2 & -22 \\ -19 & -2 & -19 \\ -123 & -43 & -148 \end{vmatrix}$$

y el valor de este último determinante de tercer orden es:

$$\begin{aligned} &= (-20)(-2)(-148) + (-19)(-43)(-22) + (2)(-19)(-123) - \\ &\quad - (-22)(-2)(-123) - (2)(-19)(-148) - (-19)(-43)(-20) = \\ &= - 5920 - 17974 + 4674 + 5412 - 5624 + 16340 \\ &= - 3092 \end{aligned}$$

EJERCICIO 13.2

Resolver los siguientes determinantes:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & -6 & 2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 9 & -2 \\ 9 & -6 & 3 & 10 \\ -8 & 7 & -6 & -5 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 8 & -6 & 6 & -8 \\ 5 & -1 & 9 & 11 \\ -9 & -6 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$