TEMA 11

NÚMEROS COMPLEJOS

11.1 RECORRIDO HISTÓRICO

Los números complejos son el siguiente eslabón o paso en la cadena numérica que a través de su historia el hombre pensante ha ido creando, comenzando con los números naturales, continuando con los enteros y así sucesivamente hasta llegar a los complejos, como se describe a continuación.

11.1.1 LOS NÚMEROS NATURALES

Los *números naturales* surgieron por la necesidad del hombre de contar inicialmente cosas enteras.

El primer sistema de numeración que el hombre inventó fue el de los números naturales, o sea los enteros positivos: N = $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., \infty\}$.

Resulta elemental que no pudo suceder de otra manera, ya que, por una parte, los demás sistemas de numeración tienen como base a éste o a otros antecesores, pero el sistema de números naturales no tiene antecesor; por otra parte, resulta también muy obvio que lo primero que tuvo necesidad de contar el hombre fueron cosas enteras, como, por ejemplo, cuántas vacas tenía, o cuántos dedos había en su mano, o cuántos hijos tenía, etc. Por esa razón, ya que el invento de estos números se dio en forma natural o espontánea, su sistema ha sido bautizado como el de "los naturales".

Así, pues, lo primero que tuvo necesidad el humano respecto de los números fue simplemente contar. De hecho, los inventó para eso, para contar en forma directa. Pero en su proceso histórico de evolución surgieron hombres inteligentes que no se conformaron con eso, sino que captaron la posibilidad de hacer cuentas también con esos números inventados inicialmente para contar nada más.

La primera operación inventada fue la suma. El gran problema del hombre en todas las épocas frente a sus números, o sea con los números hasta entonces conocidos, ha sido que al inventar operaciones con ellos a veces se pueden efectuar y a veces no, lo que indica que la deficiencia está en el sistema de números, no en la operación misma. Dicho en otras palabras, cuando hay cuentas que no puede el humano efectuar sin que se haya caído en lo absurdo es que le faltan números por conocer, dentro de los cuales están las soluciones de lo que en ese instante no puede obtener.

Cuando el hombre apenas había inventado los números naturales y las operaciones básicas, se topó algún día con lo dicho en el párrafo anterior, es decir que ciertas cuentas no podía efectuarlas porque no había números, dentro de los que conocía, que fueran su solución.

Así, por ejemplo, para hacer 3 + 5 no había problema, pues el resultado era uno de los números que conocía, en este caso el 8. De igual forma, para hacer la resta 14 - 10 fácilmente encontraba en el número 4 (que era parte de su numeración) la respuesta. Sin embargo, cuando por primera vez se planteó 2 - 9 se encontró en serios aprietos para dar contestación, pues ninguno de los números que hasta entonces manejaba eran solución a esa operación. Ténganse en cuenta que hoy sabemos que $2 - 9$ es - 7 porque conocemos los números negativos, pero cuando hablamos de que la humanidad apenas iba en los números naturales, ese número negativo no existía, por lo tanto no se podía ni siquiera pensar en él.

Esto le hizo ver a los pensantes de aquellas épocas que había alguna falla, ya fuera en la cuenta misma o en el sistema de numeración. Y la conclusión fue que la deficiencia estaba en éste último. Inventó entonces el hombre más números: ¿cuáles?, aquellos que solucionaran las restas a las que no podía hallarles respuesta. De manera que a los números conocidos les agregó los negativos llegando históricamente al sistema de los números enteros

11.1.2 LOS NÚMEROS ENTEROS

Los *números enteros* surgieron por la necesidad de y para dar solución a las restas de un número natural menos otro mayor que el primero.

El sistema de los números enteros es { $-\infty$, ... , -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... ∞ }

Con los números enteros ya se podía efectuar cualquier resta, pues ahora 4 - 20 encontraba su solución en el número - 16 ya conocido. Sin embargo, volvieron a aparecer deficiencias al haber operaciones que mientras unas sí podían efectuarse, otras no. Era el caso, por ejemplo, de la división 30 ÷ 5 que tenía su solución en el número 6 ya conocido; pero en cambio divisiones del tipo 26 ÷ 7 eran insolubles, ya que ningún número de los conocidos hasta ese momento eran su respuesta.

Volvió a repetirse el proceso: aquello era un indicativo de que el sistema de numeración conocido o empleado era deficiente, o sea, le faltaban números. Se inventaron entonces aquellos que dieran respuesta a las divisiones del tipo del ejemplo anterior. Así se llegó al sistema de los números racionales (aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros). De manera que la división 26 ÷ 7 encontró solución.

11.1.3 LOS NÚMEROS RACIONALES

Los *números racionales* surgieron por la necesidad de y para dar solución a las divisiones de un número entero entre otro entero no submúltiplo del primero.

Los números racionales son $\left\{ x \middle| x = \frac{a}{b} \right\}$

Debe entenderse que "inventar números" en este proceso histórico significa -o significó- agregarle otros a los ya conocidos, pero nunca eliminar los conocidos para sustituirlos por otros nuevos. Y ese "agregar" fue siempre en función de la operación que no podía dar solución.

Algo que no se ha vuelto a mencionar es que junto con los números el hombre fue creando operaciones que realizar con ellos. De manera que al seguir inventando cuentas algún día se le ocurrió la raíz cuadrada. Su definición apareció a partir del inverso de la multiplicación de un número por sí mismo. De manera que si de 6×6 obtenía 36 , resultaba inicialmente muy simple que la raíz cuadrada de 36 fuese 6 .

Sin embargo, de manera semejante a las operaciones descritas en los párrafos anteriores, algún día debió preguntarse: ¿Y la raíz cuadrada de 32 cuánto es?. Y no halló respuesta, porque dentro de los números conocidos hasta ese momento (los racionales, o sea los escritos como el cociente dos enteros), no había ninguno que elevado al cuadrado diera 32 . Y volvió a repetirse la historia: ¡faltaban números a su sistema conocido!.

11.1.4 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los *números irracionales* surgieron por la necesidad de y para dar solución a las raíces no exactas.

Inventó ahora los irracionales, entre los que están principalmente todas las raíces (cuadradas, cúbicas, cuartas, etc.) no exactas. Con esos nuevos números ya se tenían respuestas a $\sqrt{17}$, o bien $\sqrt{88}$.

La unión de los números racionales con los irracionales dio como resultado el sistema de numeración de los **números reales**, los que representados geométricamente en la recta numérica la ocupaban totalmente, sin dejar ya ningún espacio vacío.

Pero nuevamente se cae a lo mismo: al seguir inventando cuentas se llega a que mientras unas sí tienen solución, otras no, lo que significa que el sistema de numeración conocido está incompleto.

Por ejemplo, la ecuación de segundo grado $x^2 - 25 = 0$ significa ¿qué numero al cuadrado menos 25 da cero?, la cual tiene fácil solución: $x = \pm 5$. Sin embargo, las hay que carecen de solución en los números reales, como por ejemplo $x^2 + 25 = 0$. Ningún número (real) elevado al cuadrado más 25 da cero, porque dos números positivos sumados jamás dan cero (todo número real elevado al cuadrado es positivo).

Debe entenderse que el hecho de que una ecuación del tipo $x^2 + 25 = 0$ carezca de solución, no lo es porque la ecuación en sí misma no la tenga, sino porque no se conocen números que al elevarse al cuadrado y sumarse con 25 den cero. O sea, el problema no radica en la cuenta misma, sino en el sistema de numeración conocido. Faltan números. Esos números que faltan son precisamente los números complejos.

11.2 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

> **Los *números complejos* surgieron por la necesidad de y para dar solución a las raíces cuadradas negativas.**

El origen de los números complejos está en la imposibilidad de sacar raíces cuadradas a números negativos dentro del sistema de números hasta entonces conocido, el de los reales. Por lo que continuando con el mismo proceso histórico que ha llevado al hombre a inventar números, la invención de más números a partir de los reales es para darle solución a las raíces cuadradas negativas. En otras palabras, en el sistema de los números complejos ya se pueden obtener raíces cuadradas a números negativos.

11.2.1 UNIDAD IMAGINARIA

Todo el problema de obtener un resultado de raíces cuadradas de números negativos se concentra en la raíz cuadrada de menos uno, $\sqrt{-1}$, como puede verse en los siguientes ejemplos:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(16)(-1)} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(25)(-1)} = \sqrt{25} \times \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$$

Por esta razón, a $\sqrt{-1}$ se le llama ***i*** (de ***i***maginaria), es decir que

$$i = \sqrt{-1}$$

de donde se obtienen las siguientes igualdades:

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2$$
$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 \text{ , etc.}$$

Puede verse que a partir de i^5 se repiten cíclicamente los 4 valores iniciales de las primeras cuatro potencias de i.

11.2.2 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Si al representar geométricamente los números reales se llenó totalmente la recta numérica, o sea, se ocuparon todos los puntos en una dimensión, debe necesariamente pasarse a la siguiente escala que es la de dos dimensiones, o sean los puntos en el plano. Los números complejos, al no haber ya espacio en la recta numérica, se representan por todos los puntos del plano cartesiano.

Para definir la ubicación de un punto situado en una recta (una dimensión), basta dar una coordenada. Para definir la ubicación de un punto situado en un plano (dos dimensiones), se requieren dos coordenadas; con una sola es insuficiente ya que existirían muchos puntos en el plano que satisfacen esa única e insuficiente condición. Para definir la ubicación de un punto situado en el espacio (tres dimensiones), se requieren tres coordenadas.

Hay dos maneras de definir la ubicación de un punto en el plano: por *coordenadas cartesianas* o por *coordenadas polares*.

En las coordenadas cartesianas, respecto de un ori gen arbitrario, se da la distancia horizontal (abscisa o distancia sobre el eje x) y la distancia vertical (ordenada o distancia sobre el eje y). Ver figura 11.1.

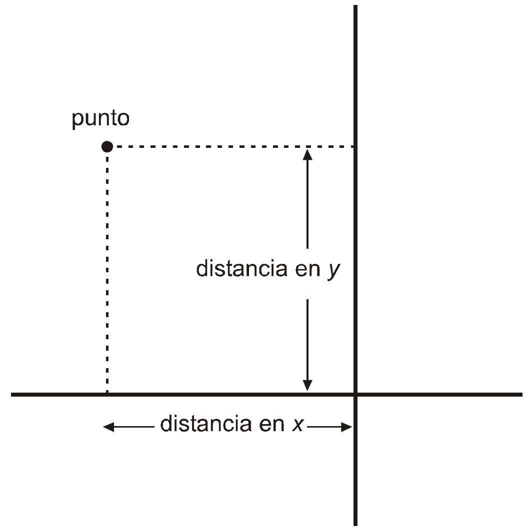

figura 11.1

Como cada punto del plano representa a un número complejo, la manera de localizarlo en dicho plano es su nomenclatura. Se dirá entonces que ese número complejo está escrito en forma cartesiana.

En las coordenadas polares, respecto de un punto sobre una línea arbitraria de referencia, se da la distancia de separación entre el punto arbitrario y el punto que se desea ubicar, y el ángulo que se forma. Ver figura 11.2.

Como cada punto del plano representa a un número complejo, la manera de localizarlo en dicho plano es su nomenclatura. Se dirá entonces que ese número complejo está escrito en forma polar.

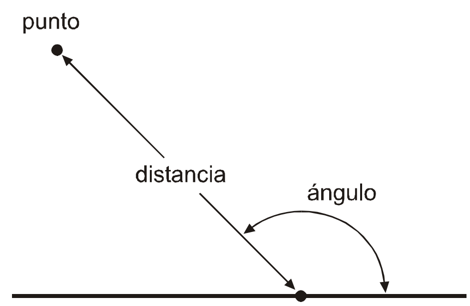

figura 11.2

11.2.3 NOMENCLATURA Y NOTACION

Para representar cualquier número, el hombre se ha topado con la dificultad de cómo hacerlo de manera que dicha representación resulte fácil de memorizar y de escribir. Y no sólo eso, sino que al pasar de un sistema de numeración al siguiente debía cuidar de que la nueva simbología fuera de tales características que no modificara la ya existente. Al final de cuentas debe entenderse que 4, 89, 2027, etc., no son otra cosa que símbolos con los cuales se representa un número. El sistema decimal y sus reglas fueron una manera sencilla, o la más sencilla que descubrió, de representar los números.

De la misma forma, cuando el hombre entró al mundo de los números complejos se encontró con la dificultad de darles nombre sin que se alteraran los ya conocidos, es decir, que los números reales siguieran teniendo su misma simbología. Llegó entonces a la conclusión de que la manera más fácil era por su ubicación en el plano.

Por lo dicho anteriormente, existen dos formas elementales de escritura para simbolizar a un número complejo: Una es la forma cartesiana y la otra la forma polar.

En forma cartesiana se considera como una suma de vectores para desplazarse desde el origen hasta el punto en el plano que representa al número complejo. El desplazamiento sobre el eje x se representa por la letra *a* y el desplazamiento por el eje *y* con la letra *b*, agregándole la letra *i*, origen y clave de los números complejos (recordar que $i = \sqrt{-1}$). De acuerdo con el cuadrante en el que esté ubicado el punto que represente al número complejo, tanto *a* como *b* pueden ser positivos o negativos.

La forma Cartesiana de un número complejo es:

$$a + bi$$

en donde:
- a: parte real;
- bi: parte imaginaria;
- a y b: números reales.

En forma polar, a la distancia *r* se le llama *módulo* y al ángulo θ se le llama *argumento*.

La forma polar de un número complejo es:

$$r\,\underline{|\theta}$$

en donde:
- r : módulo (distancia)
- θ : argumento (ángulo)

Ejemplo 1: El número $4 + 3i$ en forma cartesiana es el mismo que $5\,\underline{|\,36.869}$ en forma polar, como se muestra en la figura 11.3.

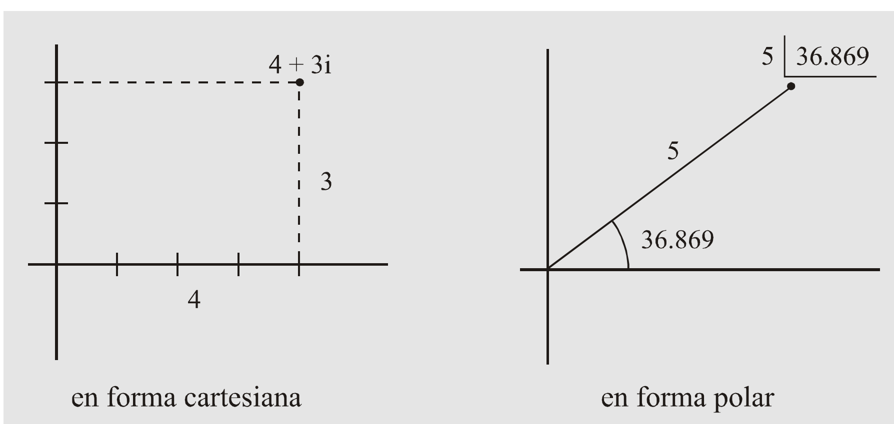

figura 11.3

NOTA: $5\,\underline{|\,36}$ se lee *"cinco, ángulo de treinta y seis"*.

11.2.4 TRANSFORMACIONES

Para realizar transformaciones, ya sea de forma cartesiana a polar o viceversa, se hacen coincidir el origen del plano cartesiano con el origen del polar, ver figura 11.4, y se aplica la trigonometría de los cuadrantes.

A) DE CARTESIANA A POLAR

Se tienen conocidos los valores de a y de b, a partir de los cuales deben encontrarse r y θ. En el triángulo rectángulo de la figura 5.4, inciso a), puede verse que por el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

de donde

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1.1)$$

Sea θ el ángulo formado por el eje x positivo y por r, medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj (sentido positivo conforme a la trigonometría de los cuadrantes) y sea α el ángulo agudo formado por r y el eje x más próximo. Ver los cuatro incisos de la figura 11.4. Entonces, del triángulo rectángulo del inciso a), figura 11.4, puede verse que por trigonometría que:

$$tan\,\alpha = \frac{b}{a}$$

de donde se obtiene la siguiente relación para el ángulo α,

$$\alpha = arc\ tan\left|\frac{b}{a}\right| \qquad (1.2)$$

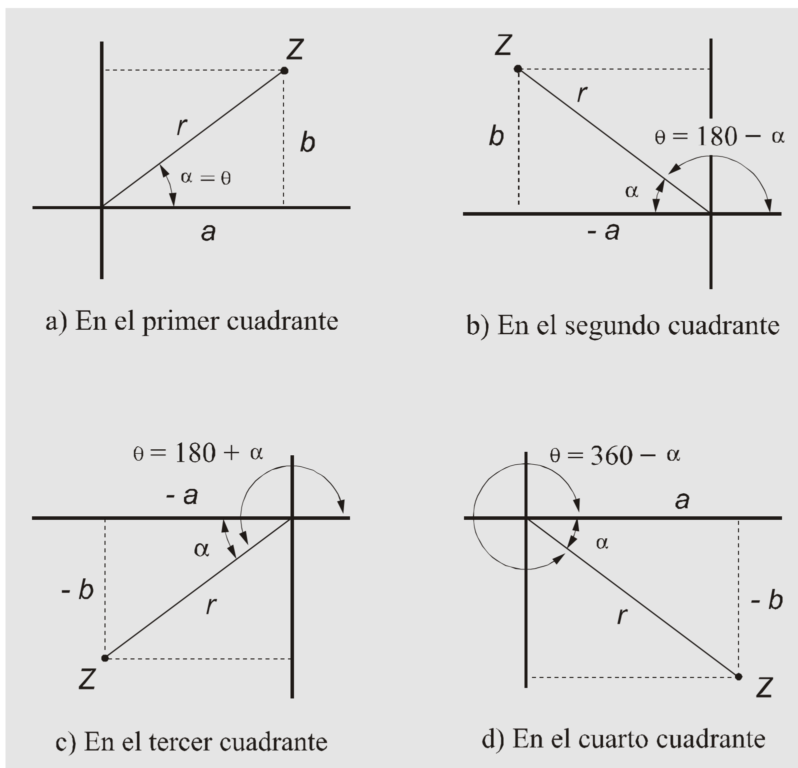

figura 11.4

Conocido el ángulo α en cualquier cuadrante, se puede deducir el valor del ángulo θ de la siguiente manera:

$\theta = \alpha$	si Z está en el primer cuadrante;
$\theta = 180 - \alpha$	si Z está en el segundo cuadrante;
$\theta = 180 + \alpha$	si Z está en el tercer cuadrante;
$\theta = 360 - \alpha$	si Z está en el cuarto cuadrante;

Ejemplo 5: Convertir a forma polar el número complejo $Z = 5 + 12i$.

Solución: Por las relaciones (1.1) y (1.2) de la página anterior se obtiene que

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \qquad \text{y}$$

$$\alpha = arc\,tan\left|\frac{12}{5}\right| = 67.38$$

como está en el primer cuadrante, $\theta = \alpha$, de manera que

$$5 + 12i = 13\underline{\big|\,67.38} \qquad \text{(figura 11.5)}$$

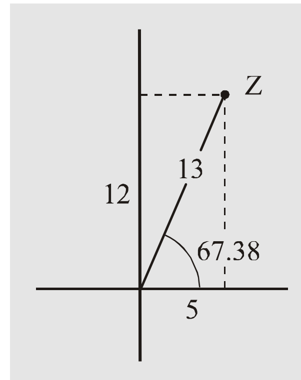

figura 11.5

Ejemplo 6: Convertir a forma polar el número complejo Z = -10 + 24i .

Solución: Por las relaciones (1.1) y (1.2), se obtiene que

$$r = \sqrt{(-10)^2 + (24)^2} = 26 \qquad \text{y}$$

$$\alpha = arctan\left|\frac{24}{-10}\right| = 67.38$$

como está en el segundo cuadrante, $\theta = 180 - \alpha$, es decir, $\theta = 180 - 67.38 = 112.61$, de manera que

$$-10 + 24i = 26\underline{\big|\,112.61} \qquad \text{(figura 11.6)}$$

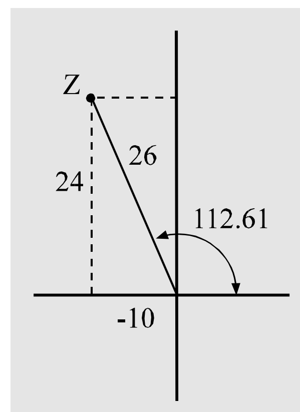

figura 11.6

Ejemplo 7: Convertir a forma polar el número complejo Z = -12 - 5i .

Solución: Por las relaciones (1.1) y (1.2), se obtiene que

$$r = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13 \qquad \text{y}$$

$$\alpha = arctan\left|\frac{-5}{-12}\right| = 22.619$$

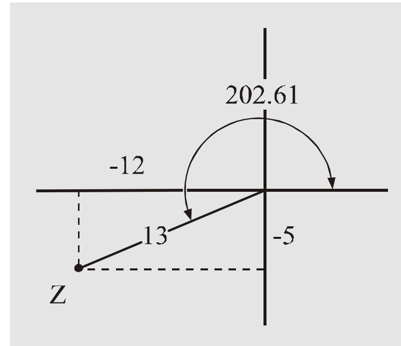

figura 11.7

como este número complejo está en el tercer cuadrante, θ = 180 + α , es decir,

θ = 180 + 22.619 = 202.619,

de manera que

$$-12 - 5i = 13\underline{|\ 202.619} \qquad \text{(figura 11.7)}$$

Ejemplo 8: Convertir a forma polar el número complejo Z = 15 - 36*i*

Solución: Por las relaciones (1.1) y (1.2), se obtiene que

$$r = \sqrt{15^2 + (-36)^2} = 39 \qquad \text{y}$$

$$\alpha = arctan\left|\frac{-36}{15}\right| = 67.38$$

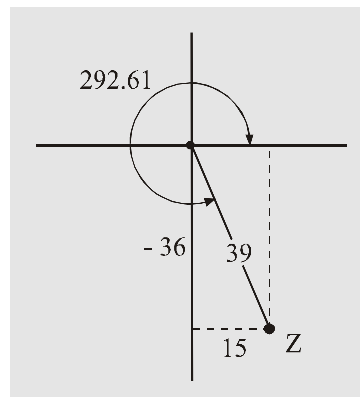

figura 11.8

como está en el cuarto cuadrante, θ = 360 - α , es decir,

θ = 360 - 67.38 = 292.619,

de manera que

$$15 - 36i = 39\underline{|\ 292.619} \qquad \text{(figura 11.8)}$$

B) DE POLAR A CARTESIANA

Se tienen conocidos los valores de *r* y θ , a partir de los cuales deben encontrarse *a* y *b*. En el triángulo rectángulo de la figura 11.4, inciso (a), puede verse que por trigonometría:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad ; \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{a = r\cos\theta} \qquad (1.3)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \quad ; \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{b = r\operatorname{sen}\theta} \qquad (1.4)$$

Ejemplo 9: Convertir a forma cartesiana el número complejo $35\underline{\lfloor 40}$

Solución: Por las relaciones (1.3) y (1.4), se obtiene que

$a = 35\ cos\ 40 = 26.811$
$b = 35\ sen\ 40 = 22.497$

de manera que

$$35\underline{\lfloor 40} = 26.811 + 22.497i$$

Ejemplo 10: Convertir a forma cartesiana el número complejo $20\underline{\lfloor 134}$

Solución: Por las relaciones (1.3) y (1.4), se obtiene que

$a = 20\ cos\ 134 = -\ 13.893$
$b = 20\ sen\ 134 = 14.\ 386$

de manera que

$$20\underline{\lfloor 134} = -13.893 + 14.386i$$

Ejemplo 11: Convertir a forma cartesiana el número complejo $10\underline{\lfloor 201}$

Solución: Por las relaciones (1.3) y (1.4), se obtiene que

$a = 10\ cos\ 201 = -\ 9.335$
$b = 10\ sen\ 201 = -\ 3.583$

de manera que

$$10\underline{\lfloor 201} = -9.335 - 3.583i$$

Ejemplo 12: Convertir a forma cartesiana el número complejo $17\underline{|\,270}$

Solución: Por las relaciones (1.3) y (1.4), se obtiene que

$$a = 17\ cos\ 270 = 0$$
$$b = 17\ sen\ 270 = -\ 17$$

de manera que

$$17\underline{|\,270} = 0 - 17i$$
$$17\underline{|\,270} = -17i$$

CALCULADORAS

Por lo general, las calculadoras traen una o dos teclas con las que se pueden hacer transformaciones de forma cartesiana a polar y viceversa. Pueden ser teclas como

$\boxed{\text{P} \rightarrow \text{R}}$ o bien $\boxed{\text{Pol (}}$ o alguna semejante.

El alumno deberá consultar el instructivo de su propia calculadora para investigar la forma de ingresar los datos, lo mismo para cambiar la información en la pantalla de ***a*** a ***b*** o bien de ***r*** a $\boldsymbol{\theta}$. Es común que los datos se almacenen en las memorias E y F.

EJERCICIO 9

Convertir a forma polar:

1)	$3 + 4i$	2)	$-\ 20 + 15i$	3)	$-\ 5 - 12i$
4)	$24 - 10i$	5)	$-\ 1 + i$	6)	$-\ 9 - i$
7)	$9 + i$	8)	$0.26 - 1.4i$	9)	$0.5 + 0.4i$
10)	$2.2 - 0.77i$	11)	$-\ 5.6 - 6i$	12)	$-\ 13 + 0.7i$
13)	$-6i$	14)	$4i$	15)	$-\ 25$

Convertir a forma cartesiana

16)	$4\underline{|\,25}$	17)	$5\underline{|\,152}$	18)	$1\underline{|\,282}$
19)	$14\underline{|\,321}$	20)	$6\underline{|\,205}$	21)	$11\underline{|\,102}$
22)	$9\underline{|\,277}$	23)	$4\underline{|\,19}$	24)	$17\underline{|\,202}$
25)	$21\underline{|\,197}$	26)	$19\underline{|\,302}$	27)	$2\underline{|\,177}$
28)	$31\underline{|\,5}$	29)	$14\underline{|\,187}$	30)	$40\underline{|\,332}$

11.3 OPERACIONES FUNDAMENTALES

De la misma manera que cada vez que se pasó de un sistema de numeración al siguiente las operaciones matemáticas ya existentes no se modificaron, pero además con los nuevos números añadidos se estableció la regla para adaptar esas operaciones ya existentes a los nuevos números, al pasar al sistema de numeración de los complejos, las operaciones ya existentes en el sistema de los reales permanecen inalterados con las reglas que se aplican a todos los números complejos.

En otras palabras, debe ampliarse la regla de las operaciones existentes para que al aplicarse al nuevo sistema de numeración, no altere lo ya existente.

Para analizar las operaciones fundamentales en los números complejos, como éstos pueden escribirse básicamente de dos maneras, en cada una de esas formas debe efectuarse el análisis.

11.3.1 LA SUMA

11.3.1.1 *En forma cartesiana*

Sean dos números complejos definidos de la siguiente forma:

$$Z_1 = a + bi \qquad \text{y}$$
$$Z_2 = c + di$$

entonces

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

es decir, se suman como dos binomios algebraicos, o sea, los términos semejantes.

Ejemplo 13: Si $Z_1 = -4 + 8i$ y $Z_2 = 7 + 9i$,

entonces

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (-4 + 8i) + (7 + 9i) \\ &= -4 + 7 + 8i + 9i \\ &= 3 + 17i \end{aligned}$$

Ejemplo 14: La suma de los números reales 18 + 12 da 30. Estos números considerados como complejos deben dar el mismo resultado. Efectivamente, como el número real 18 es el número complejo $18 + 0i$ y el número real 12 es el complejo $12 + 0i$, su suma, con la regla de los números complejos, es:

$$\begin{aligned}(18 + 0i) + (12 + 0i) &= 18 + 12 + 0i + 0i \\ &= 30\end{aligned}$$

11.3.1.2 <u>En forma polar</u>

La suma en forma polar resulta más laboriosa que en cartesiana, por lo que se recomienda transformar los números de polar a cartesiana, efectuar en esta forma la suma y en caso necesario regresar a la polar.

Sin embargo, a pesar de que la suma en forma polar es más laboriosa y menos conveniente de efectuar así, no significa que no pueda realizarse. La suma en forma polar se efectúa exactamente igual que una suma de vectores.

SUMA VECTORIAL

Sean $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ dos vectores dados y α el ángulo de separación entre ellos, como lo muestra la figura 11.9.

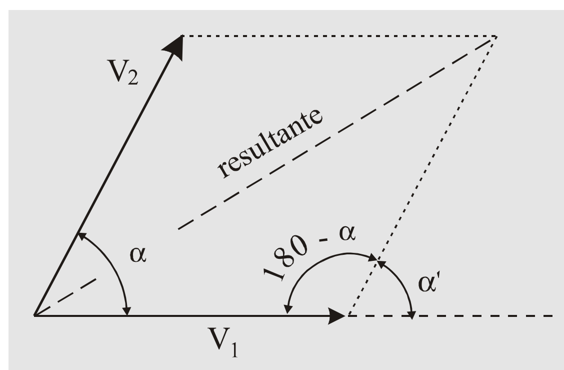

figura 11.9

De acuerdo con el método gráfico, si a partir de los vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ se construye el paralelogramo, se obtiene el dibujo donde la diagonal es la resultante.

Obsérvese que los ángulos α y α' son iguales por ser correspondientes. Además, por la Geometría, se sabe que los dos triángulos que resultan en dicho paralelogramo al trazar la diagonal, son iguales. De manera que analizando uno de ellos, ver figura 11.10, se obtiene:

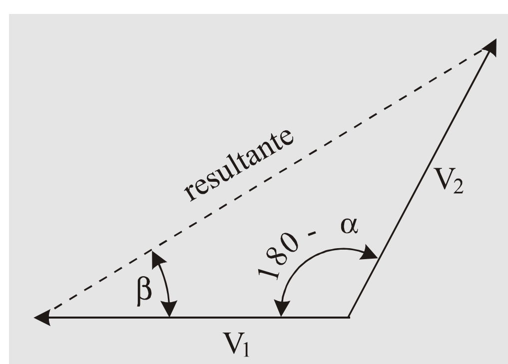

figura 11.10

Por la ley de los cosenos:

$$r^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\, cos\left(180 - \alpha\right) \qquad \textbf{(1.5)}$$

y como por Trigonometría,

$$cos\left(180 - \alpha\right) = -\, cos\,\alpha \qquad \textbf{(1.6)}$$

sustituyendo **(1.6)** en **(1.5)** , se obtiene:

$$r^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos\alpha$$

y despejando:

$$r = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos\alpha} \qquad \textbf{(1.7)}$$

Para calcular el ángulo **β** , formado por la resultante ***r*** y el vector $\boldsymbol{V_1}$, utilizando la Ley de los senos en el mismo triángulo de la figura 11.10:

$$\frac{V_2}{sen\,\beta} = \frac{r}{sen\left(180 - \alpha\right)} \qquad \textbf{(1.8)}$$

y como por Trigonometría,

$$sen\left(180 - \alpha\right) = sen\,\alpha \qquad \textbf{(1.9)}$$

sustituyendo **(1.9)** en **(1.8)** , se obtiene:

$$\frac{V_2}{sen\,\beta} = \frac{r}{sen\,\alpha}$$

y despejando:

$$sen\,\beta = \frac{V_2\,sen\,\alpha}{r}$$

de donde finalmente se obtiene que:

$$\beta = arc\,sen\left(\frac{V_2\,sen\,\alpha}{r}\right) \qquad \textbf{(1.10)}$$

Tómese en cuenta que la relación **(1.10)** da el ángulo formado por la resultante ***r*** y el vector que no aparece en ella, es decir, el vector $\mathbf{V_2}$ debe ser el que no forma al ángulo **β**.

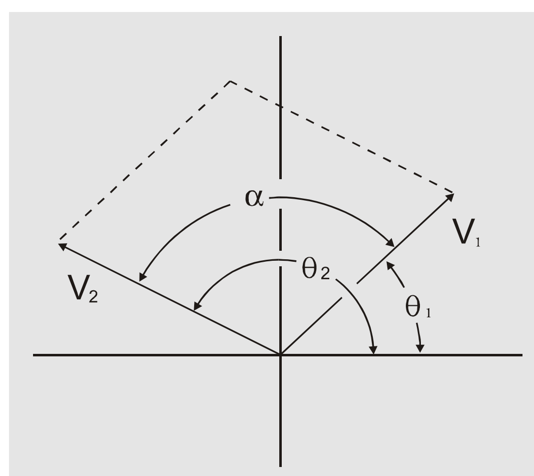

figura 11.11

El ángulo α es la diferencia de los ángulos originales θ_2 menos θ_1, como puede verse en la figura 11.11, para lo cual debe tomarse el ángulo mayor como θ_2 y el de ángulo menor como θ_1.

Ejemplo 15: Sumar los números complejos $9\underline{|152} + 7\underline{|50}$

Solución: Como $\mathbf{V_1}$ debe escogerse de manera que $\theta_1 < \theta_2$, se tiene que:

$$V_1 = 7\underline{|50} \qquad \text{y} \qquad V_2 = 9\underline{|152}$$

es decir,

$$r_1 = 7\,;$$
$$\theta_1 = 50\,;$$
$$r_2 = 9$$
$$\theta_2 = 152$$

y

$$\alpha = 152 - 50 = 102$$

como se ve en la figura 11.12.

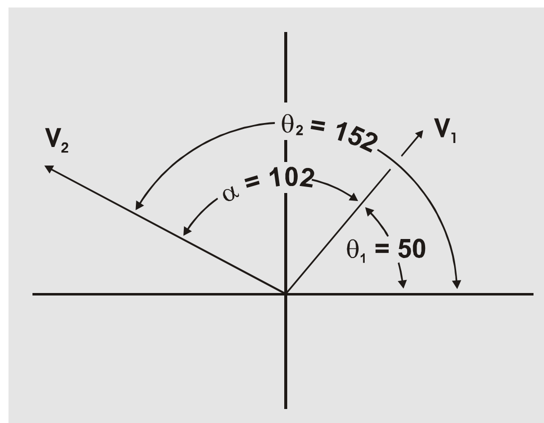

figura 11.12

Por la relación **(1.7)** se tiene que

$$r = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\alpha}$$

Sustituyendo:

$$r = \sqrt{7^2 + 9^2 + 2(7)(9)\cos 102}$$

$$r = 10.188$$

y por la relación **(1.10)** se obtiene que

$$\beta = arc\,sen\left(\frac{V_2\,sen\,\alpha}{r}\right)$$

$$\beta = arc\,sen\left(\frac{9\,sen\,102}{10.188}\right)$$

$$\beta = 59.778$$

El ángulo θ es la suma de los ángulos β más 50, como se observa en la figura 11.13, o sea,

$$\theta = 59.778 + 50 = 109.778.$$

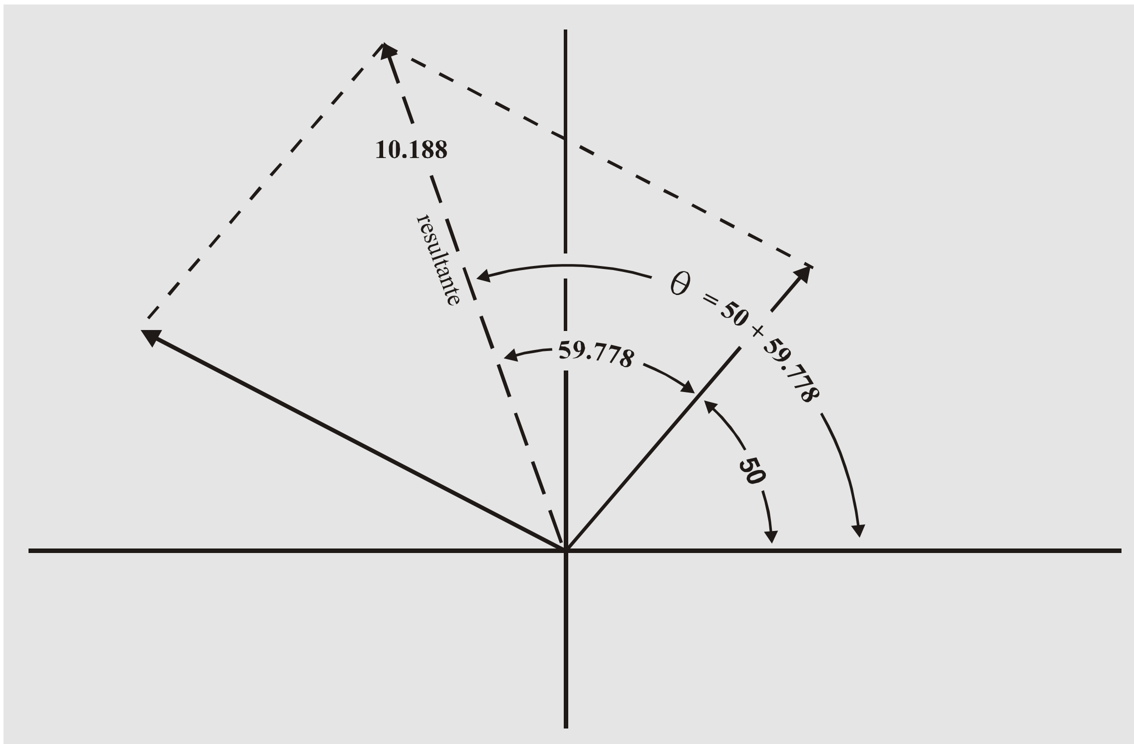

figura 11.13

Así que $$9\,\underline{|\ 152} + 7\,\underline{|\ 50} = 10.188\,\underline{|\ 109.778}$$

11.3.2 LA MULTIPLICACIÓN

11.3.2.1 *<u>En forma cartesiana</u>*

Se realiza exactamente igual que un producto algebraico de dos binomios, en donde debe recordarse que $i^2 = -1$.

Ejemplo 16: $(2 - 3i)(- 7 - i)$
$$\begin{aligned} &= - 14 - 2i + 21i + 3i^2 \\ &= - 14 + 19i + 3(- 1) \\ &= - 14 + 19i - 3 \\ &= - 17 + 19i \end{aligned}$$

11.3.2.2 *En forma polar*

Se multiplican los módulos y se suman los argumentos. Si $Z_1 = r_1 \underline{|\,\theta_1}$ y $Z_2 = r_2 \underline{|\,\theta_2}$ entonces

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= r_1 \underline{|\,\theta_1} \times r_2 \underline{|\,\theta_2} \\ &= r_1 r_2 \underline{|\,\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}$$

Ejemplo 17: $5 \underline{|\,126} \times 12 \underline{|\,143} = 5 \times 12 \underline{|\,126 + 143}$

$$= 60 \underline{|\,269}$$

11.3.3 LA DIVISIÓN

11.3.3.1 *En forma cartesiana*

Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador. Se realizan los productos como dos binomios algebraicos, en donde $i^2 = -1$. Al final debe separarse la parte real de la imaginaria y escribirse el resultado en forma cartesiana.

Ejemplo 18: $\dfrac{5 - 2i}{1 + 4i}$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{(5 - 2i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} &= \frac{5 - 22i + 8i^2}{1 - 16i^2} \\ &= \frac{5 - 22i + 8(-1)}{1 - 16(-1)} \\ &= \frac{-3 - 22i}{17} \\ &= -\frac{3}{17} - \frac{22}{17} i \end{aligned}$$

11.3.3.2 *En forma polar*

Se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Si $\quad Z_1 = r_1 \underline{\lfloor \theta_1}$ $\quad$ y $\quad Z_2 = r_2 \underline{\lfloor \theta_2}$ $\quad$ entonces

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \underline{\lfloor \theta_1}}{r_2 \underline{\lfloor \theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \underline{\lfloor \theta_1 - \theta_2}$$

Ejemplo 19: $\dfrac{5 \underline{\lfloor 126}}{12 \underline{\lfloor 143}} = \dfrac{5}{12} \underline{\lfloor 126 - 143}$

$$= \frac{5}{12} \underline{\lfloor -17} = \frac{5}{12} \underline{\lfloor 343}$$

11.3.4 POTENCIAS

Como una potencia es la abreviación de una multiplicación, basta aplicar la regla de la multiplicación respectiva *n* veces, ya sea en forma cartesiana o en forma polar.

Así, para $(a + bi)^n$ debe aplicarse el binomio de Newton en donde debe recordarse que $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; etc., mientras que para $\left[r \underline{\lfloor \theta} \right]^n$ se deduce fácilmente que $\left[r \underline{\lfloor \theta} \right]^n = r^n \underline{\lfloor n\theta}$.

Ejemplo 20: $(-2 + 3i)^4$
$= (-2)^4 + 4(-2)^3(3i) + 6(-2)^2(3i)^2 + 4(-2)^1(3i)^3 + (3i)^4$
$= 16 - 96i + 216i^2 - 216i^3 + 81i^4$
$= 16 - 96i + 216(-1) - 216(-i) + 81(1)$
$= 16 - 96i - 216 + 216i + 81$
$= -119 + 120i$

Ejemplo 21: $\left(7 \underline{\lfloor 208}\right)^5 = 7^5 \underline{\lfloor 5 \times 208}$

$$= 16807 \underline{\lfloor 1040} = 16807 \underline{\lfloor 320}$$

11.3.5 RAÍCES

En el idioma Español la mayoría de las palabras tienen más de una acepción, es decir, significado. Dentro del mundo de las Matemáticas también sucede lo mismo, por ejemplo, la palabra **tangente** tiene el significado trigonométrico del cateto opuesto entre el cateto adyacente y también el significado geométrico de la recta que toca en un solo punto a una curva. Se distinguen en su escritura porque la tangente trigonométrica se abrevia ***tan*** y va seguida del argumento o ángulo mientras que la tangente geométrica no se abrevia y carece de argumento. Es el caso de la palabra raíz, que significa, por una parte, la operación inversa a la potenciación, por ejemplo, raíz cuadrada, raíz cúbica, etc., y por otra parte, cuando se trata de ecuaciones, significa el valor de la incógnita que satisface la ecuación.

De manera que debe entenderse que en este tema la palabra **raíz** se toma como el inverso de alguna potencia.

En los números reales se sabe que un número R tiene dos raíces, una positiva y otra negativa, si la raíz es de orden par y $R>0$; en cambio, solamente tiene una raíz, si ésta es de orden impar para todo R . En los número complejos, todo número complejo Z tiene n raíces *enésimas*, es decir, tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, y así sucesivamente.

Para obtener la raíz enésima de un número complejo, debe estar éste en forma polar. En forma polar cada una de las n raíces se obtienen con la fórmula

$$\sqrt[n]{r\underline{|\theta}} = \sqrt[n]{r}\ \underline{\left|\frac{\theta + 360k}{n}\right.} \qquad \text{, para } k = 0, 1, 2, \ldots (n - 1) \qquad \textbf{(1.11)}$$

en donde, la primera raíz se obtiene sustituyendo k por 0; la segunda raíz sustituyendo k por 1; la tercera raíz sustituyendo k por 2, y así sucesivamente hasta (n - 1).

Ejemplo 22: Obtener las tres raíces cúbicas de $\sqrt[3]{125\underline{|72}}$

Solución: $\sqrt[3]{125} = 5$

Para el ángulo de la primera raíz, con $k = 0$, se obtiene:

$$\theta_1 = \frac{\theta + 360k}{n} = \frac{72 + 360(0)}{3} = 24$$

Para el ángulo de la segunda raíz, con $k = 1$, se obtiene:

$$\theta_2 = \frac{\theta + 360k}{n} = \frac{72 + 360(1)}{3} = 144$$

Para el ángulo de la tercera raíz, con $k = 2$, se obtiene:

$$\theta_3 = \frac{\theta + 360k}{n} = \frac{72 + 360(2)}{3} = 264$$

De manera que las tres raíces cúbicas son:

$$1^{a}\text{ raíz} = 5\underline{|\,24}$$

$$2^{a}\text{ raíz} = 5\underline{|\,144}$$

$$3^{a}\text{ raíz} = 5\underline{|\,264}$$

Una regla práctica para calcular los ángulos de cada una de las raíces enésimas es dividir la circunferencia (360º) en igual número de partes como lo sea el índice del radical, para obtener así la distancia entre cada ángulo buscado, o sea, si se trata de una raíz cuadrada dividir 360º entre 2 (la distancia es de 180º), si se trata de una raíz cúbica dividir 360º entre 3 (la distancia es de 120º), si se trata de una raíz cuarta dividir 360º entre 4 (la distancia es de 90º), etc. Entonces el primer ángulo es igual al ángulo original entre n (entre el índice del radical); a ese primer ángulo se le suma la distancia calculada anteriormente para obtener el segundo ángulo, y así sucesivamente.

11.3.6 RAÍCES COMPLEJAS

Como se dijo en la página 79, *"los números complejos surgieron por la necesidad de y para dar solución a las raíces cuadradas negativas"*, las que se reducen a la raíz cuadrada $\sqrt{-1}$. En los números reales la ecuación $x^2 + 2x + 17 = 0$ no tiene solución, ya que al aplicar la fórmula general se llega a una raíz cuadrada negativa; sin embargo, en los números complejos sí tiene solución en virtud de que por eso y para eso surgieron.

Ejemplo 23: Encontrar las raíces complejas de la ecuación $x^2 + 2x + 17 = 0$.

Solución: Utilizando la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(17)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 8i}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(-1 \pm 4i\right)}{\cancel{2}}$$

$$= -1 \pm 4i$$

Las soluciones son:

$$x_1 = -1 + 4i$$
$$x_2 = -1 - 4i$$

COMPROBACIÓN: Sustituyendo x_1 en la ecuación original $x^2 + 2x + 17 = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(-1 + 4i\right)^2 + 2\left(-1 + 4i\right) + 17 &= 1 - 8i + 16i^2 - 2 + 8i + 17 \\ &= 1 - 8i - 16 - 2 + 8i + 17 \\ &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo x_2 en la ecuación original $x^2 + 2x + 17 = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(-1 - 4i\right)^2 + 2\left(-1 - 4i\right) + 17 &= 1 + 8i + 16i^2 - 2 - 8i + 17 \\ &= 1 + 8i - 16 - 2 - 8i + 17 \\ &= 0\end{aligned}$$

EJERCICIO 10

a) Efectuar las siguientes operaciones en forma cartesiana y expresar el resultado en forma cartesiana:

1) $(5 - 2i) + (-10 - 10i)$
2) $(-6 + 8i) + (9 - 12i)$
3) $-12i + (-15 - 24i)$
4) $i + (-8 + 5i)$
5) $(15 - 20i)(-10 - 24i)$
6) $(-6 + 8i)(9 - 12i)$
7) $(-12i)(-15 - 24i)$
8) $(i)(-8 + 5i)$
9) $(15 - 20i) \div (-10 - 24i)$
10) $(-6 + 8i) \div (9 - 12i)$
11) $(-12i) \div (-15 - 24i)$
12) $(i) \div (-8 + 5i)$

b) Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y expresar el resultado en forma polar:

13) $4\underline{|\,25} \times 7\underline{|-325}$
14) $3\underline{|\,85} \times 17\underline{|\,125}$
15) $40\underline{|-205} \div 8\underline{|\,35}$
16) $33\underline{|\,185} \div 11\underline{|\,5}$
17) $100\underline{|\,156} \div 20\underline{|\,246}$
18) $36\underline{|\,284} \div 12\underline{|\,284}$

c) Encontrar las raíces indicadas:

19) $\sqrt[3]{27\underline{|\,66}}$
20) $\sqrt{64\underline{|\,84}}$
21) $\sqrt[4]{81\underline{|-200}}$
22) $\sqrt[5]{32\underline{|\,315}}$

d) Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

23) $2x^2 + 2x + 5 = 0$
24) $3x^2 + 6x + 6 = 0$
25) $5x^2 + 2x + 2 = 0$
26) $2x^2 + 6x + 9 = 0$
27) $17x^2 - 2x + 1 = 0$
28) $2x^2 + 6x + 17 = 0$
29) $13x^2 + 4x + 1 = 0$
30) $17x^2 - 6x + 2 = 0$
31) $2x^2 + 2x + 13 = 0$
32) $5x^2 - 6x + 9 = 0$
33) $9x^2 - 6x + 2 = 0$
34) $45x^2 + 6x + 1 = 0$
35) $13x^2 + 2x + 2 = 0$
36) $9x^2 - 6x + 5 = 0$
37) $2x^2 - 2x + 13 = 0$
38) $x^2 + 6x + 45 = 0$
39) $2x^2 - 8x + 10 = 0$
40) $4x^2 + 8x + 5 = 0$
41) $x^2 + 8x + 20 = 0$
42) $5x^2 - 8x + 4 = 0$

e) Efectuar las sumas en forma polar:

43) $21\underline{|76} + 11\underline{|153}$

44) $26\underline{|156} + 19\underline{|213}$

45) $6\underline{|303} + 9\underline{|150}$

46) $49\underline{|323} + 39\underline{|217}$

47) $39\underline{|328} + 35\underline{|127}$

48) $126\underline{|56} + 109\underline{|213}$

f) Efectuar las siguientes potencias:

49) $(2 - i)^5$

50) $(2 - 2i)^4$

51) $(4 + i)^6$

52) $(1 + 3i)^5$

53) $(3 - 3i)^6$

54) $(1 - i)^7$