TEMA 2

COMBINACIONES

DEFINICIÓN: Dados n elementos, el número de conjuntos que se pueden formar con ellos, tomados de r en r, se llaman **combinaciones.**

Por ejemplo, sean cuatro elementos $\{a,b,c,d\}$. Los conjuntos, tomados de tres en tres, que se pueden formar con esos cuatro elementos son:

$$\{a,b,c\}\ ,\ \{a,b,d\}\ ,\ \{a,c,d\}\ \text{y}\ \{b,c,d\}$$

es decir, en total hay 4 conjuntos diferentes formados con tres elementos. Se dice entonces que existen 4 combinaciones posibles.

Es importante notar la diferencia que existe entre una permutación y una combinación. En la permutación lo que importa es el lugar que ocupa cada elemento, mientras que en la combinación no, sino solamente "los integrantes" del conjunto. Hay que recordar que en un conjunto no importa el orden de los elementos. Por ejemplo, los siguientes conjuntos son iguales por tener los mismos elementos, aunque se hayan escrito en diferente orden:

$$\{b,c,d\} = \{c,b,d\}$$

En el estudio matemático de las combinaciones, lo que interesa saber es **cuántas** son, no cuáles son. A pesar de eso, en el ejemplo anterior, se enlistaron cuáles son para clarificar la idea de lo que significa combinaciones.

FÓRMULA

La fórmula general para calcular las combinaciones que se pueden obtener con n elementos, tomados de r en r, es

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántos equipos de voleibol se pueden formar a partir de 9 jugadores disponibles?

Solución: Se requieren 6 jugadores para formar un equipo de voleibol, por lo que, en este caso se tiene que

$n = 9$
$r = 6$

de manera que

$$_9C_6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} = 84$$

Ejemplo 2: ¿Cuántas comités de 1 presidente y 3 vocales se pueden formar a partir de un grupo de 8 personas, las cuales pueden ocupar todas cualquier puesto?

Solución: Se requiere una sola persona, de entre las 8 disponibles, para ocupar el cargo de presidente, y 3 de entre las siete que restan para ocupar el puesto de vocal. Se trata de un problema de **composición**, ya que la combinación total (el comité) se compone a su vez de varias subcombinaciones, por lo que, en este caso se tiene que

$$\left.\begin{aligned} n_p &= 8 \\ r_p &= 1 \end{aligned}\right\} \text{presidente}$$

$$\left.\begin{aligned} n_v &= 7 \\ r_v &= 3 \end{aligned}\right\} \text{vocales}$$

de manera que

$$_8C_1 \times {}_7C_3 = \frac{8!}{1!(8-1)!} \times \frac{7!}{3! \times (7-3)!} = 280$$

Hay 280 maneras de formas el comité.

En problemas de **composición** el resultado final no depende de que se inicie el cálculo con la primera subcombinación o con otra. En el problema anterior, si en vez de iniciar con las combinaciones posibles para presidente se comienza con los vocales, se obtiene el mismo resultado. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} n_v = 8 \\ r_v = 3 \end{array}\right\} \text{vocales n = 8}$$

$$\left.\begin{array}{l} n_p = 5 \\ r_p = 1 \end{array}\right\} \text{presidente n = 5}$$

de manera que

$$_8C_3 \times {}_5C_1 = \frac{8!}{3!(8-3)!} \times \frac{5!}{1!(5-1)!} = 280$$

Ejemplo 3: Una persona desea invitar a 5 de sus amigos entre un grupo de 8 amistades. ¿De cuántas maneras puede hacerlo:

a) en total;
b) si las personas **A** y **B** no deben ir juntas;
c) si las personas **A** y **B** no pueden ir por separado;
d) si debe estar forzosamente la persona **C** ?

Solución: a) En este caso, al no estar condicionado, se tiene que

$n = 8$
$r = 5$

de manera que $$_8C_5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$

b) Hay tres opciones: Una, que **A** no vaya mientras **B** sí, con lo cual es suficiente para que ambos no estén juntos; dos, que **B** no vaya mientras **A** sí; y tres, que ni **A** ni **B** vayan. Conviene entonces analizar caso por caso.

I.- **Cuando A no asiste y B sí**: Si **B** sí asiste, quedan ya solamente 4 personas por invitar para completar las cinco requeridas, las cuales deben escogerse entre las seis que restan quitando a **A** (para garantizar que no asista) y a **B** (que ya está entre los asistentes).

En este caso $n = 6$
$r = 4$

de manera que $$ {}_6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15 $$

II.- **Cuando A sí asiste y B no**: Es exactamente lo mismo que el caso anterior, por lo tanto hay 15 maneras más.

III.- **Cuando ni A ni B asisten**: Las cinco personas deben escogerse entre las seis restantes, quitando a **A** y a **B** (para garantizar que no asistan):

En este caso $n = 6$
$r = 5$

de manera que $$ {}_6C_5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6 $$

En total resultan **15 + 15 + 6 = 36** formas.

c) Hay dos opciones: Una, que **A** y **B** sí asistan; la otra, que ni **A** ni **B** vayan. Se analiza entonces caso por caso.

I.- **Cuando A y B sí asisten:** Si **A** y **B** sí asisten quedan ya solamente 3 personas por invitar para completar las cinco requeridas, las cuales deben escogerse entre las seis que restan quitando a **A** y a **B** que ya están entre los asistentes:

En este caso $n = 6$
$r = 3$

de manera que $$ {}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20 $$

II.- **Cuando ni A ni B asisten:** Las cinco personas deben escogerse entre las seis restantes, quitando a **A** y a **B** (para garantizar que no asistan):

En este caso $n = 6$
$r = 5$

de manera que $$ {}_6C_5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6 $$

En total resultan **20 + 6 = 26** formas.

d) Si **C** asiste, quedan ya solamente 4 personas por invitar para completar las cinco requeridas, las cuales deben escogerse entre las siete que restan.

En este caso $n = 7$
$r = 4$

de manera que $${}_{7}C_{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$$

Ejemplo 4: Un grupo escolar consta de 16 alumnos. Es necesario formar simultáneamente 3 equipos con ellos, uno de 5 alumnos para ir a la Cruz Roja, otro de 3 alumnos para visitar el Hospital y el tercero de 2 alumnos para ir al Banco. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir?

Solución: El primer equipo de 5 alumnos se puede seleccionar de entre los 16 que hay en el grupo escolar; una vez formado ese primer equipo, quedan solamente 11 alumnos de entre los cuales debe integrarse el segundo equipo con tres de ellos; una vez formado ese segundo equipo, quedan solamente 8 alumnos de entre los cuales debe integrarse el tercer equipo con dos de ellos

De manera que $${}_{16}C_{5} \times {}_{11}C_{3} \times {}_{8}C_{2} = 4368 \times 165 \times 28 = 20\ 180\ 160$$

Nótese que se trata de un **problema de composición**. A parte de la mostrada, ¿de cuántas otras maneras se puede resolver? Hacerlo de otras dos formas para comprobar que el resultado no se altera.

Ejemplo 5: Se reparten cinco cartas de una baraja corriente a un jugador. ¿De cuántas maneras le puede caer:

a) un par;
b) dos pares;
c) una tercia;
d) una corrida o escalera;
e) una flor;
f) un full;
g) un póquer;
h) una flor imperial;
i) "pancha"?

NOTA: La baraja está formada como se muestra en la figura 10. Vistas en sentido vertical se llaman *figuras* o *palos*; vistas en sentido horizontal se llaman *valores*. Cada figura o palo consta de 13 valores, comenzando con el *As* y terminando con el *Rey* . O sea que en total hay $13 \times 4 =$ $= 52$ cartas.

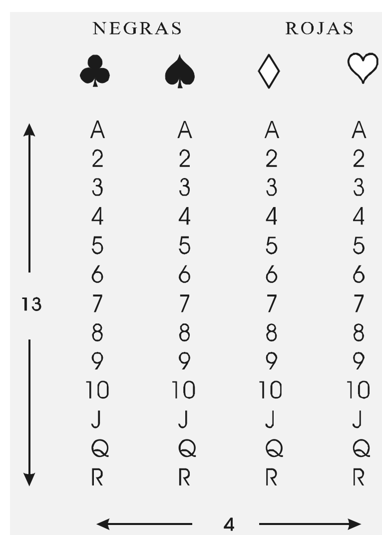

figura 10

Las diferentes combinaciones que se pueden realizar con ellas se llaman *juegos*. Para que una combinación sea realmente un juego no debe tener intersecciones con otro juego ni ser un subconjunto de otro.

Para efectos simplemente de comprensión de las soluciones propuestas es conveniente introducir una definición de cada uno de los juegos mencionados, en virtud de que suele suceder que cada jugador de baraja acostumbra tener sus propias reglas o sus propias definiciones de cada juego, asegurando cada uno que se juega como él lo sabe hacer. Debe quedar claro entonces que las siguientes definiciones se aceptan rigurosamente para efectos de los cálculos que se explicarán en este curso, no como definiciones universales del juego de la baraja, pues eso abriría la puerta a la polémica.

UN PAR: *Cuando se tienen* 2 *cartas del mismo valor y las otras* 3 *diferentes entre sí y diferentes al par.*

DOS PARES: *Cuando se tienen* 2 *cartas del mismo valor y diferentes a todas las demás, otras* 2 *del mismo valor y diferentes a las demás y la quinta carta diferente a las demás.*

TERCIA: *Cuando se tienen* 3 *cartas del mismo valor y las otras* 2 *diferentes entre sí y diferentes a las de la tercia.*

CORRIDA O ESCALERA: *Cuando se tienen* 5 *cartas de valores consecutivos, a condición de que no sean las* 5 *del mismo palo.*

FLOR: *Cuando se tienen las* 5 *cartas del mismo palo o figura, a condición de que no sean consecutivas.*

FULL: *Cuando se tiene una tercia y un par.*

PÓQUER: *Cuando se tienen* 4 *cartas del mismo valor y, por consecuencia, la otra diferente.*

FLOR IMPERIAL: *Cuando se tienen las* 5 *cartas del mismo palo y además consecutivas en valor.*

PANCHA O PACHUCA: *Cuando no se tiene ninguna de las combinaciones anteriores.*

Un procedimiento muy conveniente es comenzar a calcular un caso particular y luego generalizarlo. Esto es lo que se irá haciendo en cada inciso.

Solución: a) **UN PAR:** Para hacer un par determinado (caso particular), por ejemplo de *Ases*, hay 4 cartas de las que deben seleccionarse dos. En este caso se tiene que

$$n = 4$$
$$r = 2$$

de manera que hay ${}_4C_2 = 6$ maneras diferentes de hacer un par de *Ases*. Pero el problema no pide que sea par de *Ases*, sino un par cualquiera, el cual puede ser de doses, de treses, de cuatros, de cincos, etc. Entonces, generalizando a un par cualquiera:

$13 \times {}_4C_2 = 78$ formas de hacer un par con apenas dos cartas recibidas.

Hasta aquí van dos cartas; las otras tres deben ser diferentes al par recibido para que no se forme ni tercia ni póquer y, además, diferentes entre sí para que el juego recibido no se convierta en *dos pares* o en *full*.

Para asegurar que la tercera carta no sea del mismo valor que del par que ya se tiene, deben excluirse del mazo las cuatro cartas (en el sentido horizontal de la figura 10) de ese valor. Por ejemplo, si el par es de *Ases*, deben "sacarse" del mazo los cuatro *Ases* para seleccionar la tercera carta, como se muestra en la figura 11.

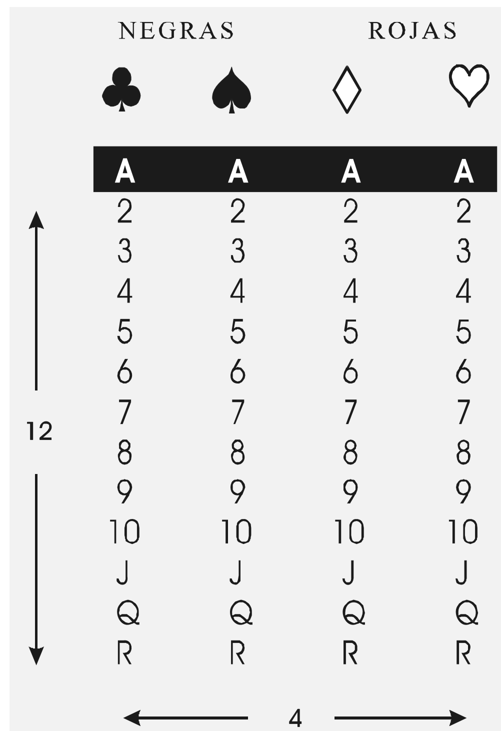

figura 11

Quedan entonces **12 × 4 = 48** cartas. La tercera carta debe ser una cualquiera de esas 48 cartas. Una vez repartida, debe repetirse el proceso anterior, es decir, deben sacarse del mazo ahora las cuatro cartas del mismo valor de esa tercera carta para asegurar que no vaya a completarse otro par, o hasta tercia, con la cuarta y quinta cartas.

De manera que la cuarta carta debe ser una cualquiera de las 44 cartas que quedaron y la quinta debe ser una de las 40 restantes. Reuniendo finalmente todos estos elementos se llega a que un par cualquiera se puede obtener de

$$13 \times {}_4C_2 \times \frac{48 \times 44 \times 40}{3!} = 1\,098\,240$$

La división entre $3!$ es para quitar las repeticiones que se forman con las cartas tercera, cuarta y quinta.

Supóngase que, entre los trece posibles, el par cualquiera sea de *qüinas* (**Q**). Ver figura 12, ambos incisos.

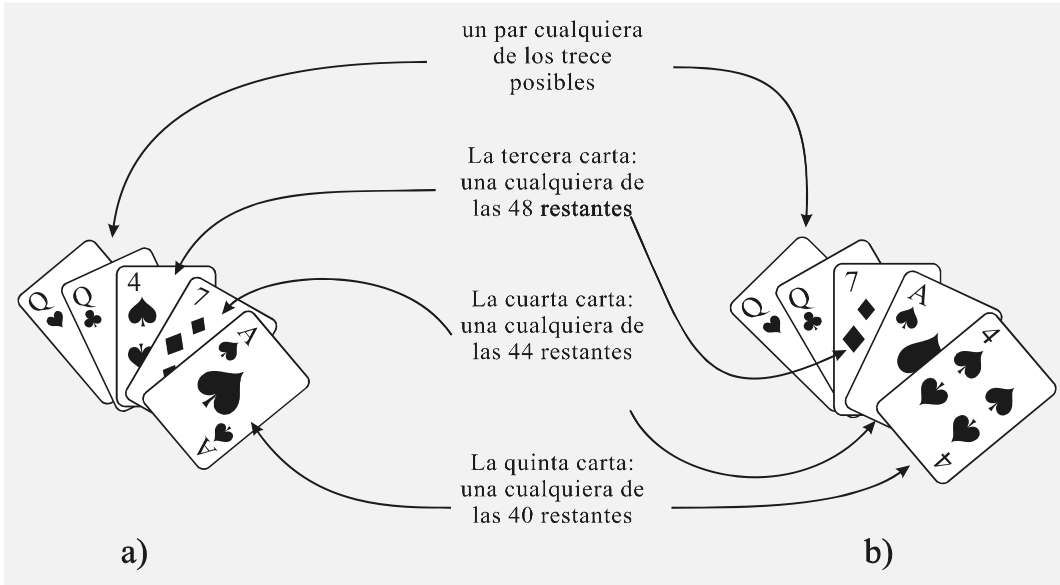

figura 12

Al multiplicar por 48 se establece que la tercera carta es una cualquiera de esas 48 restantes. Esa "cualquier carta" puede ser, en algunos casos, la que para otros casos sea la cuarta carta o la quinta, por ejemplo, el 7 *de diamantes,* pero también puede ser el 4 *de picas* (ver figura 12, incisos *a* y *b*) .

Al multiplicar por 44 se establece también que la cuarta carta es una cualquiera de las 44 que restantes. Esa "cualquier" carta puede ser, por ejemplo, el *As de picas,* pero también puede ser el 7 *de diamantes* (ver figura 12, incisos *a* y *b*) .

Finalmente, al multiplicar por 40 se establece también que la quinta carta es una cualquiera de las 40 que restantes. Esa "cualquier" carta puede ser, por ejemplo, el 4 *de picas,* pero también puede ser el *As de picas* (ver figura 12, incisos *a* y *b*)

Si se observa en la figura 12, las dos manos son exactamente la misma, solamente en diferente orden las cartas. A esas repeticiones, que en total son 6, son a las que se refiere el denominador **3!** que las elimina.

b) **DOS PARES:** Con las primeras dos cartas, un *par* cualquiera se puede hacer de

$$13\times\ {}_4C_2\ = 13\times 6 \quad \text{formas.}$$

Para asegurar que el siguiente par no sea del mismo valor que del par que ya se tiene, deben excluirse del mazo las cuatro cartas (en el sentido horizontal de la figura 10) de ese valor. Por ejemplo, si el par es de *Ases*, deben "sacarse" del mazo los cuatro *Ases* antes de seleccionar el segundo par, como se ve en la figura 11.

Entonces, el segundo *par cualquiera* se puede hacer de

$$12 \times {}_4C_2 \quad \text{formas.}$$

Una vez sacadas también del mazo las cuatro cartas del valor del segundo par, la quinta carta puede ser una cualquiera de las 44 restantes. De manera que en total, dos pares cualesquiera se pueden hacer de

$$\frac{13 \times {}_4C_2 \times 12 \times {}_4C_2}{2!} \times 44 = 123\,552 \quad \text{formas}$$

Igual que en el inciso anterior, se divide entre **2!** para quitar las repeticiones que se forman con los dos pares cualquiera, como se muestra en la figura 13.

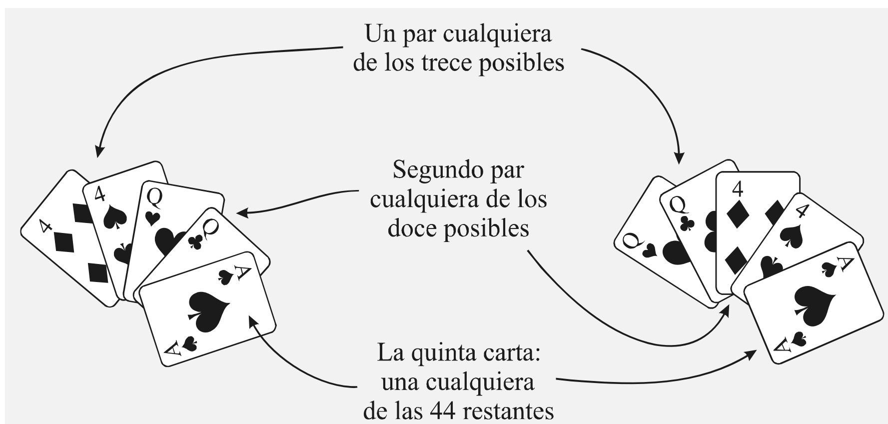

figura 13

c) **UNA TERCIA:** Con las primeras tres cartas, una *tercia* cualquiera (sin tomar en cuenta todavía a la cuarta ni a la quinta cartas) se puede hacer de

$$13 \times {}_4C_3 \quad \text{formas.}$$

La cuarta carta debe escogerse de entre las 48 que quedan después de eliminar las cuatro del mismo valor de la tercia hecha (para asegurarse que ni con la cuarta ni con la quinta cartas se complete el poker; luego, la quinta carta debe escogerse de entre las 44 que quedan después de eliminar las cuatro del mismo valor de la cuarta carta (para asegurarse que no se haga un par). Como en los casos anteriores, se divide entre **2!** ya que con la cuarta y la quinta cartas hay repeticiones porque ambas son "una carta cualquiera" de las que van quedando.

Entonces, *una tercia* cualquiera se puede hacer de

$$13 \times {}_4C_3 \times \frac{48 \times 44}{2!} = 54\,912 \text{ formas.}$$

Es interesante hacer notar que el orden en que se realicen los cálculos no modifica el resultado final. Es decir, se puede comenzar por calcular una carta que no pertenezca a la tercia, luego la tercia y al final la quinta carta.

En ese orden, el cálculo correspondiente es

$$\frac{52 \times 12 \times {}_4C_3 \times 44}{2!} = 54\,912$$

igual que en la forma anterior.

d) **UNA CORRIDA O ESCALERA**: Consiste en tener cinco cartas de valores consecutivos, por ejemplo **2, 3, 4, 5, 6,** ó también **8, 9, 10, J, Q**, a condición de que no sean todas de la misma figura porque entonces a eso se le llama *flor imperial*. El *As* puede ir antes del 2 haciendo las veces del número 1 (para formar la corrida *A*, 2, 3, 4, 5) o después del *K* (para formar la corrida *10, J, Q, K, A*).

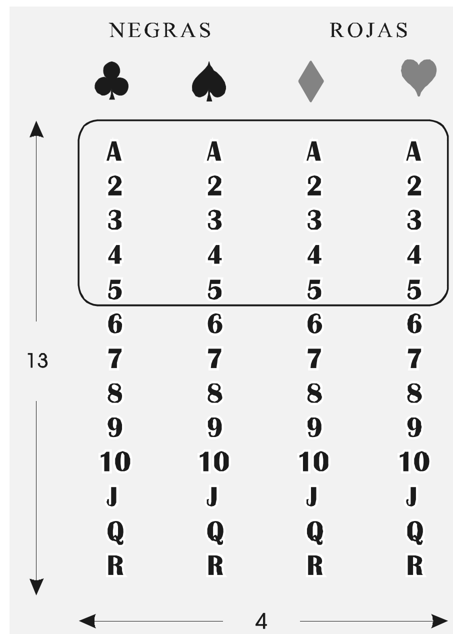

figura 14

La primera *corrida* posible es la que va del ***As*** al número **5**, como lo muestra la figura 14. Debe seleccionarse entonces un *As* de entre los cuatro que existen; un 2 de entre los cuatro que existen; un 3 de entre los cuatro que existen; un 4 de entre los cuatro que existen y un 5 de entre los cuatro que existen. Solamente que allí están incluidas 4 *flores imperiales*, por lo que deben restarse, o sea:

$$\left({}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 \right) - 4 = 1020$$

De igual manera se pueden formar 1020 *corridas* del **2** hasta el **6**; otras 1020 del **3** hasta el **7**, etc., es decir, se pueden formar otros 10 grupos, por lo que el número de corridas en total que se pueden hacer es

$$10\left({}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 - 4 \right) = 10\,200 \text{ formas.}$$

e) **UNA FLOR:** consiste en tener una mano con todas las cartas de la misma figura (juego vertical), a condición de que no formen *corrida* porque se vuelve *flor imperial*, como se muestra en la figura 15.

Entonces *una flor* en particular, por ejemplo, de tréboles, se puede hacer escogiendo cinco cartas de entre las trece de la misma figura (ver figura 15 en sentido vertical) y restando luego las 10 corridas posibles:

$${}_{13}C_5 - 10 = 1277 \quad \textit{flores} \text{ de diamantes}$$

Pero como hay cuatro figuras con cada una de las cuales se puede repetir lo anterior, entonces el número total de *flores* que se pueden obtener es

$$4\left({}_{13}C_5 - 10\right) = 5108$$

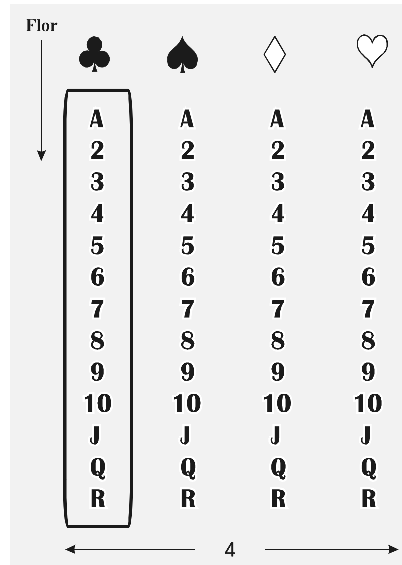

figura 15

f) **UN FULL:** Consiste en una tercia y un par. El número de formas en que se puede hacer una tercia cualquiera es

$$13 \times {}_4C_2$$

y un par cualquiera, una vez hecha la tercia, es de

$$12 \times {}_4C_2$$

de manera que el full se puede hacer de

$$13 \times {}_4C_3 \times 12 \times {}_4C_2 = 3744$$

g) **UN PÓQUER:** Consiste en tener las cuatro cartas de un mismo valor. El número de formas con las cuatro primeras cartas en que le pueden caer cuatro cartas del mismo valor, por ejemplo, los cuatro *Reyes* (caso particular) es ${}_4C_4$, pero como hay trece valores diferentes en total son (generalizando) $13 \times {}_4C_4$. La quinta carta debe ser una de las 48 restantes, de manera que finalmente, el número de maneras en que le puede salir un póker es

$$13 \times {}_4C_4 \times 48 = 624$$

h) **UNA FLOR IMPERIAL:** Consiste en tener las cinco cartas de la misma figura y además corridas. Por lo que ya se vio, son **10 × 4 = 40**.

i) **UNA PANCHA:** Es la ausencia de cualquier juego anterior, o sea, es “no tener nada”, aunque realmente sí es una combinación. Para calcularla, hay que garantizar primero que no caiga ningún juego horizontal, es decir, ni un par, ni dos pares, ni tercia, ni full ni póquer. La primera carta es una cualquiera de las 52 que hay en el mazo, o sea ${}_{52}C_1 = 52$; la segunda carta es una cualquiera de las 48 que restan en el mazo luego de quitar todas las del mismo valor a la carta anterior para asegurar que no caiga par, o sea ${}_{48}C_1 = 48$; la tercera carta es una cualquiera de las 44 que restan en el mazo luego de quitar todas las del mismo valor a la carta anterior para asegurar que no caiga un par, o sea ${}_{44}C_1 = 44$; la cuarta carta es una cualquiera de las 40 que restan en el mazo luego de quitar todas las del mismo valor a la carta anterior para asegurar que no caiga par, o sea ${}_{40}C_1 = 40$; y la quinta carta es una cualquiera de las 36 que restan en el mazo luego de quitar todas las del mismo valor a la carta anterior para asegurar que no caiga par. Multiplicándolas resulta

$$\frac{52 \times 48 \times 44 \times 40 \times 36}{5!} = 1317\,888$$

Se divide entre 5! por la misma razón que se hizo cuando se calculó *un par*, *dos pares* y *tercia*, para quitar las repeticiones. Solamente que en el cálculo anterior están incluidos todavía los juegos verticales, es decir, en esas 1 317 888 están incluidas las corridas, las flores y las flores imperiales, por lo que deben restarse.

De manera que el número de formas de hacer *una pancha* es

1 317 888 - 10 200 - 5 108 - 40 = 1 302 540 formas

COMPROBACIÓN: Sumando todos los juegos anteriormente calculados, resulta

	1 098 240	un par
+	123 552	dos pares
+	54 912	una tercia
+	10 200	una corrida
+	5 108	una flor
+	624	póker
+	3 744	un full
+	40	una flor imperial
+	1 302 540	una pancha

total: **2 598 960**

que es lo mismo que calculado por combinaciones: ${}_{52}C_5 = 2\ 598\ 960$.

PROBLEMAS DE INTERSECCIONES

Algunos problemas de combinaciones están planteados de tal manera que la(s) condición(es) está(n) constituida(s) por elementos de intersección entre dos o más conjuntos.

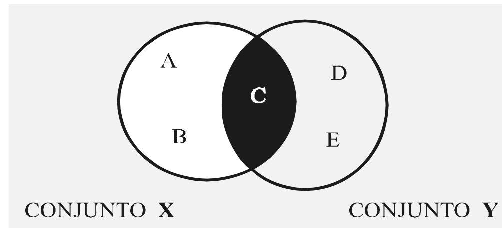

figura 16

Por ejemplo, se dan dos conjuntos **X** e **Y** con elementos $\mathbf{X} = \{A, B, C\}$ e $\mathbf{Y} = \{C, D, E\}$, de tal manera que la condición recae en el elemento **C**, el cual pertenece a ambos conjuntos, o sea, es una intersección (ver figura 16). La solución debe plantearse considerando las opciones cuando **C** sí está y cuando **C** no está. La suma de todos esos casos es la solución.

El siguiente ejemplo es un caso de intersección.

Ejemplo 6: Un jugador de dominó toma sus siete fichas. ¿De cuántas maneras le pueden caer dos *mulas* y dos *cincos*? Nota: La *mula* de *cincos* $\boxed{\mathbf{5-5}}$ cuenta ya como dos *cincos*.

Solución: El juego de dominó consta de 28 fichas, tal como lo muestra la figura 18. Se llaman *mulas* a las que contienen igual número en sus dos cuadros. Existen 7 fichas de cada número, es decir, hay 7 fichas de *seises*; 7 de *cincos*; 7 de *cuatros*, etc.

En este caso se trata de un problema de intersección, ya que la ficha $\boxed{\mathbf{5-5}}$ es parte simultánea de dos condiciones, que sea *mula* y que sea *cinco* (aunque realmente son dos *cincos*), como puede verse en la figura 17.

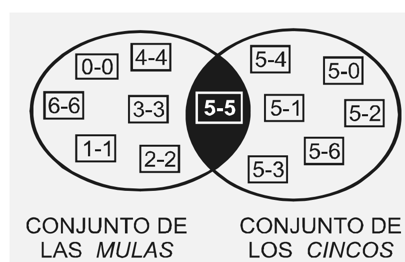

figura 17

Por lo tanto, el problema debe dividirse en los casos cuando $\boxed{\mathbf{5-5}}$ sí y cuando $\boxed{\mathbf{5-5}}$ no. O sea, hay dos posibilidades: una, que le salga la *mula* de *cincos*; y dos, que no le salga la de *cincos* .

NOTA: Si se ordenan las fichas como lo muestra la figura 18 de la siguiente página, para localizar todas las fichas del mismo número se sigue primero una diagonal iniciando desde arriba y luego en forma horizontal. Para localizar las *mulas* basta seguir la columna de la izquierda. Si la mula de *cincos* $\boxed{\mathbf{5-5}}$ cuenta por 2 *cincos*, existen entonces en total 7 fichas con *cincos*, pero 8 *cincos* en total. Y así con cada número.

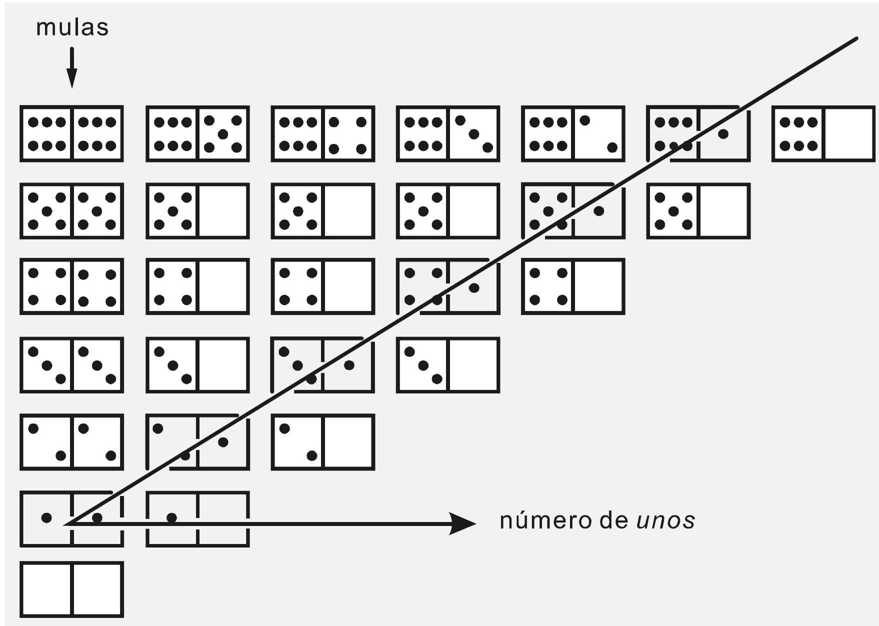

figura 18

a) **Si le sale la mula de *cincos*** $\boxed{\mathbf{5-5}}$: En este caso, con una sola ficha lleva ya una *mula* y los 2 *cincos*. La otra *mula* le puede caer de ${}_6C_1$ formas.

Lleva en este momento dos fichas. Las otras 5 que le faltan las debe seleccionar quitando todas las *mulas* y todos los *cincos* que restan, para evitar que le toquen más de 2 *mulas* y más de 2 *cincos*. Si se cuenta en la figura 18, haciendo lo anterior quedan 15 fichas para escoger.

Así que las restantes 5 fichas las puede escoger de ${}_{15}C_5$ formas. De manera que en total son:

$${}_6C_1 \times {}_{15}C_5 = 18\ 018 \text{ formas}$$

b) **Si no le sale la mula de *cincos*** $\boxed{\mathbf{5-5}}$: En este caso, las dos mulas le pueden caer, quitando la de *cincos*, de ${}_6C_2$ formas y los dos *cincos*, quitando la mula de *cincos*, le pueden caer de ${}_6C_2$ formas.

Lleva en este momento 4 fichas. Las otras 3 que le faltan las debe seleccionar quitando todas las mulas y todos los *cincos* que restan para evitar que le toquen más de dos mulas y más de dos *cincos*. Haciendo lo anterior, si se cuenta en la figura 18, quedan 15 fichas para escoger.

Así que las restantes 3 fichas (para completar sus siete fichas) las puede escoger de ${}_{15}C_3$ formas. Significa que las siete fichas las puede tomar de ${}_6C_2 \times {}_6C_2 \times {}_{15}C_3 = 102\,375$ formas, de manera que le caigan dos mulas y dos *cincos.*

Ejemplo 7: Un estudiante debe responder 10 preguntas de un cuestionario que consta de 16 reactivos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si debe contestar exactamente 2 preguntas de entre las primeras cinco y dos preguntas de entre los reactivos 5,6 y 7 ?

Solución: Se trata de un problema de intersecciones, como lo muestra la figura 19, en donde el reactivo 5 es la intersección.

Deben considerarse las dos opciones posibles: cuando el reactivo 5 es contestado, lo que implica un reactivo contestado dentro del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y uno también contestado dentro del conjunto {5, 6, 7}; o si no es contestado el reactivo 5, lo que implica que debe excluirse del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} y del conjunto {5, 6, 7} también.

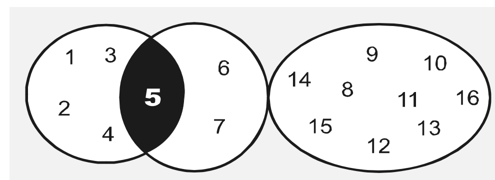

figura 19

a) **Cuando el reactivo 5 es contestado:** Implica que del conjunto {1, 2, 3, 4, 5} se tenga ya un reactivo contestado y falte ya nada más una pregunta por responder, la cual debe hacerse entre la 1 y la 4; por otro lado, implica que del conjunto {5, 6, 7} se tenga también ya un reactivo contestado y que falte ya nada más una, la cual debe hacerse entre la 6 y la 7. Hasta allí irán tres reactivos contestados; los otros siete restantes tendrán que ser escogidos del conjunto {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, o sea que hay

$$ {}_4C_1 \times {}_2C_1 \times {}_9C_7 = 288 \text{ formas} $$

b) **Cuando el reactivo 5 no es contestado:** Implica que del primer conjunto {1, 2, 3, 4, 5} deban contestarse dos reactivos del 1 al 4, pues el 5 está excluido; implica asimismo que del segundo conjunto {5, 6, 7} deban contestarse dos reactivos del 6 al 7, ya que el 5 está excluido. Hasta allí irán 4 reactivos contestados, los otros seis restantes tendrán que ser escogidos del conjunto {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, o sea que hay

$$ {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times {}_9C_6 = 504 \text{ formas} $$

El total de formas en que puede contestar el examen es la suma de las dos opciones analizadas, es decir, de 288 + 504 = 792 maneras.

Ejemplo 8: Un estudiante debe responder 10 preguntas de un cuestionario que consta de 15 reactivos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si debe contestar exactamente 3 preguntas de entre las primeras cinco?

Solución: Las tres preguntas de entre las cinco primeras las puede escoger de

$${}_5C_3 \text{ formas}$$

por lo tanto, las siete que le faltan las debe seleccionar de entre las diez restantes, que son ${}_{10}C_7$ formas.

En total tiene ${}_5C_3 \times {}_{10}C_7 = 1\,200$ opciones

Ejemplo 9: Se tienen siete números positivos y cinco negativos. ¿De cuántas maneras se pueden multiplicar tres de ellos para que el resultado sea positivo?

Solución: Tres números multiplicados dan un producto positivo en dos casos: a) si los tres son positivos; b) si dos de ellos son negativos y el otro positivo, no importa el orden. Esto es

$$\underbrace{{}_7C_3}_{\text{3 positivos}} + \underbrace{{}_5C_2}_{\text{2 negativos}} \times \underbrace{{}_7C_1}_{\text{1 positivo}} = 105$$

Ejemplo 10: Si en el sorteo Melate se tienen 54 números y hay que atinarle a seis de ellos cualesquiera para sacarse el primer lugar, ¿Cuántas maneras diferentes es posible atinarle a seis números?

Solución: Si de 54 hay que atinarle a seis, entonces la solución simplemente es

$${}_{54}C_6 = 25\,827\,165$$

Puede verse por qué el primer premio consta de tantos millones de pesos: por su elevado grado de dificultad.

EJERCICIO 3

1) ¿Cuántos equipos de futbol se pueden formar a partir de 20 jugadores disponibles, si solamente 3 de ellos pueden jugar en la portería (en ningún otro puesto) y los demás en cualquiera otra posición de las restantes?

2) ¿Cuántos equipos de futbol se pueden formar a partir de 19 jugadores disponibles, si solamente los jugadores **A**, **B**, **C** y **D** pueden jugar en la portería (en ningún otro puesto); únicamente los jugadores **D**, **E**, **F**, **G**, **H** e **I** pueden jugar en la defensa (en ningún otro puesto) y los demás en cualquiera otra posición de las restantes? Considérese que habrá 4 defensas. Tómese en cuenta que el jugador **D** es elemento de intersección del conjunto de los porteros y el conjunto de los defensas, por lo que si juega, solamente se podrá escoger dentro de uno de los conjuntos o en ninguno.

3) Se debe formar un comité con 1 presidente, 1 secretario y 3 vocales. ¿De cuántas maneras se puede formar a partir de un grupo de 10 personas, de las cuales solamente las personas **A** , **B** y **C** reúnen los requisitos para ser presidente; **C**, **D** y **E** para secretario y **F** , **G , H , I** y **J** para vocales?

4) Una persona desea invitar a 5 de sus amigos de entre un grupo de 9 de ellos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si las personas **A** y **B** son esposos y no se pueden separar y **A** y **C** son enemigos y no pueden estar ambos al mismo tiempo en ese lugar?

5) Un grupo de rescatistas consta de 12 personas. Se requiere que 3 vayan a la montaña, otros 3 al río y 4 a una laguna. ¿De cuántas maneras puede distribuirse si la persona **A** no está capacitada para ir a la montaña y la persona **B** es indispensable que vaya al río?

6) Si de una baraja corriente se le dan seis cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer dos tercias?

7) Si de una baraja corriente se le dan seis cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer tres pares?

8) Si de una baraja corriente se le dan seis cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer un par y un póker?

9) Si de una baraja corriente se le dan cuatro cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer dos pares?

10) Si de una baraja corriente se le dan cuatro cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le puede caer una tercia?

11) ¿De cuántas maneras le pueden salir dos *"cincos"* y un *"cuatro"* a un jugador de dominó al tomar sus siete fichas?. La mula de *"cincos"* cuenta por dos *"cincos"*. Sugerencia: Tomar en cuenta que los dos *"cincos"* le pueden salir en 2 fichas diferentes o en una sola si es la mula; también considerar la opción de cuando le toca la ficha *"cinco-cuatro"*.

12) ¿De cuántas maneras le pueden salir tres *"cincos"* y un *"seis"* a un jugador de dominó al tomar sus siete fichas? La mula de *"cincos"* cuenta por dos *"cincos"*. Sugerencia: Tomar en cuenta que tres *"cincos"* le pueden salir en tres fichas diferentes o en dos solamente, si le sale la mula; también, considerar la opción de cuando le toca la ficha *"cinco-seis"* .

13) ¿De cuántas maneras le pueden salir dos *"doses"* y dos *"seises"* a un jugador de dominó al tomar sus siete fichas? La mula de *"doses"* cuenta por dos *"doses"*, lo mismo la mula de *"seises"*. Sugerencia: Tomar en cuenta que dos *"unos"* le pueden salir en dos fichas diferentes o en una solamente, si le sale la mula. Lo mismo con los *"seises"*. También, considerar la opción de cuando le toca la ficha *"dos-seis"*.

14) Un estudiante debe responder 10 preguntas de un cuestionario que consta de 18 reactivos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si debe responder por lo menos 2 de los cuatro primeros reactivos?

15) Un estudiante debe responder 10 preguntas de un cuestionario que consta de 18 reactivos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si debe responder exactamente 2 de los cinco primeros reactivos y no puede contestar el 4 y 5 simultáneamente?

16) Si le dan cinco cartas a un jugador de baraja, ¿de cuántas maneras le pueden salir dos ases y tres diamantes?

17) Al tomar sus siete fichas de dominó, ¿De cuántas maneras le pueden salir un cuatro y un cinco?

18) Si de una baraja corriente se le dan siete cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer dos tercias?

19) Si de una baraja corriente se le dan siete cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer tres pares?

20) Si de una baraja corriente se le dan siete cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer un par?

21) Si de una baraja corriente se le dan siete cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le pueden caer dos pares?

22) Si de una baraja corriente se le dan siete cartas a un jugador, ¿De cuántas maneras le puede caer un póquer?