VIII

INTEGRACIÓN POR PARTES

Supóngase que se tiene la función producto $y = uv$. Si se deriva con respecto de x con la fórmula del producto se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} uv$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Multiplicando toda la igualdad por dx para eliminar denominadores:

$$dy = u\,dv \;+\; v\,du$$

Integrando en ambos miembros de la igualdad:

$$\int dy = \int u\,dv \;+\; \int v\,du$$

De estas tres integrales, solamente de la primera se puede definir su valor:

$$y = \int u\, dv + \int v\, du$$

y como al principio se dijo que $y = uv$, sustituyendo se obtiene que

$$uv = \int u\, dv + \int v\, du$$

igualdad que vista en sentido contrario es lo mismo que

$$\int u\, dv + \int v\, du = uv$$

y, finalmente, despejando la primera integral se llega a:

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du} \qquad (27)$$

La fórmula (27) es la fórmula de la integración por partes. A la integral $\int u\, dv$ se le llama *la integral original* y a la integral $\int v\, du$ se le llama *la integral que resulta*. Para su buena utilización deben vigilarse las siguientes normas:

a) La *integral original* debe convertirse en $u\, dv$, para lo cual debe hacerse u una parte de la integral original y todo el resto hacerse dv. A lo anterior se le llama *hacer la elección de variables*. No existe regla alguna para establecer qué debe hacerse lo primero y qué lo segundo. La práctica es la que guía por el camino más acertado.

b) A partir de *la elección de variables* hecha en el inciso anterior, se calculan la diferencial du y la variable v. Derivando u se obtiene du; mientras que integrando dv se obtiene v.

c) Las diferenciales deben ir en la misma igualdad.

d) *La integral que resulta* debe ser más sencilla, o la mucho semejante, que la integral original; de lo contrario, debe comenzarse el proceso eligiendo nuevas variables. Algunos criterios para decidir que la integral que resulta es más sencilla o complicada que la original se irán estableciendo en ejemplos resueltos.

e) El proceso de integración por partes puede emplearse dos o más veces dentro del mismo proceso.

A pesar de que no existe una regla infalible, comprobada, universal, que lleve a hacer a la primera vez una elección de variables adecuada, sí hay algunos criterios que funcionan en muchas o en la mayoría de las ocasiones. Estos criterios son:

i) Para integrales de la forma

$$\int p(x)\, ln\, x\, dx$$

$$\int p(x)\, arc\ sen\ x\, dx$$

$$\int p(x)\, arc\ cos\ x\, dx$$

$$\int p(x)\, arc\ tan\ x\, dx$$

en donde $p(x)$ es un polinomio, se recomienda hacer u a la función trascendente, mientras que $dv = p(x)$, o sea al polinomio.

ii) Para integrales de la forma

$$\int p(x)\, e^{ax}\, dx$$

$$\int p(x)\, sen\, x\ dx$$

$$\int p(x)\cos x\, dx$$

en donde $p(x)$ es un polinomio, se recomienda hacer $u = p(x)$, mientras que dv a la función trigonométrica o exponencial.

iii) Se sugiere a veces apoyarse en el acrónimo[1] o palabra clave **L I A T E**, iniciales de

L ogarítmicas
I nversas trigonométricas
A lgebraicas
T rigonométricas
E xponenciales

según este criterio, debe seleccionarse como u la primera función que figure en LIATE de izquierda a derecha y conforme al orden de esta palabra clave.

Conviene en este momento agregar al formulario de integrales la integral de e^u, ya que esta fórmula no puede encajarse en algún grupo especial. Dicha fórmula, que de aquí en adelante se requerirá, es

$$\int e^u du = e^u + c \qquad (28)$$

Ejemplo 1: Integrar $\int x\, sen\, x\, dx$

Solución: Esta integral por ninguno de los métodos estudiados hasta ahora puede resolverse. Conforme al inciso (a) de la página 98, para convertir la integral original en $u\, dv$ existen tres posibilidades para la elección de variables:

[1] *Acrónimo* es el vocablo que se forma por la unión de elementos o iniciales de dos o más palabras, como ovni (Objeto Volador No Identificado).

Primera posibilidad: Hacer $u = x$
$dv = sen\,x\,dx$

Segunda posibilidad: Hacer $u = sen\,x$
$dv = x\,dx$

Tercera posibilidad: Hacer $u = x\,sen\,x$
$dv = dx$

En este ejemplo, y solamente en éste, se estudiarán las tres posibilidades.

Posibilidad 1:

Haciendo	se obtiene que	
$u = x$	$du = dx$	(derivando)
$dv = sen\,x\,dx$	$v = -\,cos\,x$	(integrando)

Obsérvese que en $u\,dv$ (columna izquierda) está exactamente toda la integral original. De esta manera, si la integral original es igual a la integral $\int u\,dv$ y ésta, por la fórmula (27), es igual a $uv - \int v\,du$, entonces la integral original es igual también a $uv - \int v\,du$.

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\underbrace{\int x\,sen\,x\,dx}_{\text{integral original}} = \int u\,dv$$

$$= uv - \int v\,du$$

$$= x\left(-\,cos\,x\right) - \int -\,cos\,x\,dx$$

$$= -\,x\cos x + \underbrace{\int \cos x\,dx}$$

La integral que resulta $\overbrace{\int \cos dx}$ es a simple vista más sencilla que la original, puesto que ya es directa de fórmula, lo que significa que la elección de variables fue correcta:

$$\boxed{\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -\,x\cos x + \mathrm{sen}\,x + c}$$

Posibilidad 2:

Haciendo	se obtiene que	
$u = \mathrm{sen}\,x$	$du = \cos x\,dx$	(derivando)
$dv = x\,dx$	$v = \dfrac{x^2}{2}$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\underbrace{\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}_{\text{integral original}} = \int u\,dv$$

$$= uv - \int v\,du$$

$$\underbrace{\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}_{\text{integral original}} = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{sen}\,x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx}$$

(integral que resulta)

La integral que resulta $\int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$ es más complicada que la integral original, ya que en ambas aparece la función trigonométrica $\operatorname{sen} x$ o bien $\cos x$ y hasta allí todo es igual; sin embargo, mientras en la integral original aparece el polinomio x de primer grado multiplicando al factor $\operatorname{sen} x$, en la integral que resulta está el polinomio x^2 de segundo grado multiplicando al factor $\cos x$, es decir, al aumentar de grado el polinomio aumenta el grado de dificultad. Por lo tanto, la elección de variables no es la adecuada.

Posibilidad 3:

Haciendo	**se obtiene que**	
$u = x \operatorname{sen} x$	$du = (x \cos x + \operatorname{sen} x)\, dx$	(derivando)
$dv = dx$	$v = x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \int u \, dv$$

$$= uv - \int v \, du$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - \int \left(x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x \right) dx$$

$$\underbrace{\int x \operatorname{sen} x \, dx}_{\text{integral original}} = x^2 \operatorname{sen} x - \underbrace{\int x^2 \cos x \, dx - \int x \operatorname{sen} x \, dx}$$

Las integrales que resultan $\overbrace{-\int x^2 \cos x \, dx - \int x \operatorname{sen} x \, dx}$ son más complicadas que la integral original, ya que además de aparecer la integral de la posibilidad 2, se vuelve a repetir la original, es decir, no se avanzó nada. Por lo tanto, esta elección de variables tampoco es la adecuada.

En este ejemplo, al analizar todas las posibilidades de elecciones de variables, resultó que solamente la primera posibilidad fue la adecuada. Eso no significa que en todas las integrales por partes nada más una de todas las posibilidades sea la adecuada. Existen integrales que resolviéndose por esta técnica, pueden hacerse por dos o más formas diferentes. No hay regla para especificar cuál es la elección de variables adecuada en cada integral por partes, así como tampoco para decir cuáles integrales se hacen por partes y cuáles no. De hecho, algunas integrales que pueden realizarse por alguna otra técnica, también pueden hacerse por partes.

Ejemplo 2: Integrar $\int ln\, x\, dx$

Solución: Solamente existe una posibilidad para la elección de variables:

Haciendo	se obtiene que	
$u = ln\, x$	$du = \frac{1}{x}\, dx$	(derivando)
$dv = dx$	$v = x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\underbrace{\int ln\, x\, dx}_{\text{integral original}} = \int u\, dv$$

$$= uv - \int v\, du$$

$$= x\, ln\, x - \int x\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= x\ ln\, x - \underbrace{\int dx}$$

La integral que resulta $\overbrace{\int dx}$ es a simple vista mucho más sencilla que la original, ya que es inmediata de fórmula, por lo que la elección de variables ha sido la correcta. De hecho, no había otra opción.

Continuando el proceso se llega a que

$$\boxed{\int ln\, x\ dx = x\, ln\, x - x + c}$$

COMPROBACIÓN:

Igual que en otros ejemplos, para efectos de abreviar símbolos al momento de referirse a la derivada del resultado de la integral, hágase $I = x\ ln\, x - x + c$. Entonces

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\ ln\, x - x + c \right)$$

$$= \left(x\, \frac{d}{dx}\, ln\, x + ln\, x\, \frac{d}{dx}\, x \right) - 1 + 0$$

$$= x\left(\frac{1}{x} \right) + ln\, x\ - 1 \qquad \text{(ver nota al pie de página [2])}$$

---

[2] Nótese que según las reglas de escritura debería escribirse $-1 + x\left(\frac{1}{x}\right) + ln\, x$; sin embargo, para no alterar el orden de los términos que se fueron derivando, lo que podría complicar la comprensión del proceso de derivación, se ha escrito en el orden en que se derivó.

$$= 1 + \ln x - 1$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \ln x}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int x^2 e^x dx$

Solución: En este caso:

Haciendo	se obtiene que	
$u = x^2$	$du = 2x\, dx$	(derivando)
$dv = e^x\, dx$	$v = e^x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\int x^2 e^x dx = \int u\, dv$$

$$= uv - \int v\, du$$

$$\underbrace{\int x^2 e^x dx}_{\text{integral original}} = x^2 e^x - \underbrace{\int 2x e^x dx}_{\text{integral que resulta}}$$

Se ve que la integral que resulta es más sencilla que la integral original ya que el polinomio en x que multiplica al factor de la forma e^x, bajó de grado 2 a grado 1. Entonces la integral que resulta debe volverse a integrar por partes, haciendo ahora:

Haciendo	**se obtiene que**	
$u = 2x$	$du = 2dx$	(derivando)
$dv = e^x\, dx$	$v = e^x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x dx\right]$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int sec^3 x\, dx$

Solución: En la página 88, ejemplo 12, se dijo que las potencias nones de la secante y cosecante deben hacerse por partes. Esta integral no se puede hacer aplicando exclusivamente las técnicas para las integrales trigonométricas, sino en forma combinada con la integración por partes.

Aplicando primero la técnica de los cuadrados:

$$\int sec^3 x\, dx = \int \underbrace{sec^2 x}\, sec\, x\, dx$$

$$= \int \overbrace{\left(tan^2 x + 1\right)}\, sec\, x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec x \, dx + \int \sec x \, dx$$

La segunda integral ya es directa de fórmula. La primera integral es la que debe hacerse por partes:

Haciendo	se obtiene que	
$u = \tan x$	$du = \sec^2 x \, dx$	(derivando)
$dv = \tan x \sec x \, dx$	$v = \sec x$	(integrando)

Obsérvese que el producto $u\,dv$ es igual a $(\tan x)(\tan x \sec x \, dx) = \tan^2 x \sec x \, dx$, que es la integral que se pretende hacer por partes.

entonces

$$\int \sec^3 x \, dx = \tan x \sec x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

Nótese que volvió a salir la integral original, pero con signo negativo. En casos así, se juntan en el lado izquierdo, se suman (o restan) y se despeja. La última integral se resuelve directamente por fórmula:

$$\int \sec^3 x \, dx + \int \sec^3 x \, dx = \tan x \sec x + \ln\left(\tan x + \sec x\right)$$

$$2\int \sec^3 x \, dx = \tan x \sec x + \ln\left(\tan x + \sec x\right) + c$$

$$\boxed{\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\left[\tan x \sec x + \ln\left(\tan x + \sec x\right)\right] + c}$$

Ejemplo 5: Integrar $\int e^{2x}\, sen\, 3x\, dx$

Solución: Este ejemplo tiene por objetivo mostrar en una sola vez varios recursos que pueden emplearse en la técnica de integración por partes. El primero es que se va a utilizar dos veces la integración por partes. El segundo es que cuando aparece nuevamente la integral original, se juntan y se despeja como en el ejemplo anterior.

Haciendo	se obtiene que	
$u = e^{2x}$	$du = 2e^{x}\, dx$	(derivando)
$dv = sen\ 3x\ dx$	$v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{2x}\cos 3x\, dx}_{\text{integral que resulta}}$$

Esta integral que resulta se vuelve a hacer por partes:

Haciendo	se obtiene que	
$u = e^{2x}$	$du = 2e^{x}\, dx$	(derivando)
$dv = cos\ 3x\ dx$	$v = \dfrac{1}{3}\, s\, en\ 3x$	(integrando)

Sustituyendo en la fórmula (27) de la página 98:

$$\int e^{2x} sen\, 3x\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{2x} sen\, 3x - \int \frac{2}{3}e^{2x} sen\, 3x\, dx\right]$$

$$\int e^{2x} sen\,3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x - \frac{4}{9}\int e^{2x} sen\,3x\,dx$$

$$\int e^{2x} sen\,3x\,dx + \frac{4}{9}\int e^{2x} sen\,3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x} sen\,3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x$$

$$\int e^{2x} sen\,3x\,dx = \frac{9}{13}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} sen\,3x\right] + c$$

$$\boxed{\int e^{2x} sen\,3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x} sen\,3x + c}$$

EJERCICIO 8.1

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int arc\ sen\ x\ dx$

2) $\int ln(1-x)\,dx$

3) $\int x\ arc\tan x\ dx$

4) $\int \frac{arc\ sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

5) $\int x\ arc\tan\sqrt{x^2-1}\ \ dx$

6) $\int x\ ln\,x\ dx$

7) $\int x^2\ ln\ x\ dx$

8) $\int x\cos^2 x\ dx$

9) $\int sen\ ln\ x\ dx$

10) $\int \sqrt{x}\ \ ln\ x\ dx$