V

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int \left(ax^2 + bx + c\right)^{\frac{k}{2}} dx \text{ , con } k = \pm\ 1, -2$$

Las nueve fórmulas estudiadas en el capítulo anterior son las que habrán de utilizarse en este tema. Simplemente habrá que agregar algunos pasos algebraicos que servirán para transformar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ a la forma $(mx + n)^2 + h$, que, como se verá, se reduce a las fórmulas anteriores. Para esto, como es indispensable que el estudiante tenga la habilidad algebraica suficiente para realizar las transformaciones mencionadas, la primera parte de este capítulo se dedicará a ejercitar el paso de una forma algebraica a la otra requerida. Para deducir el procedimiento, se comenzará de atrás para adelante.

Supóngase que se tiene la suma de un binomio al cuadrado más cualquier constante, que en términos genéricos se puede enunciar como $(mx + n)^2 + h$, por ejemplo

$$\underbrace{(2x + 7)^2}_{\boxed{\text{binomio al cuadrado}}} + \underbrace{9}_{\boxed{\text{constante}}}$$

Si se desarrolla (recordando que el binomio cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo) se obtiene:

$$(2x+7)^2+9=4x^2+28x+49+9$$

cuadrado del 1º	doble producto del 1º por el 2º	cuadrado del 2º

$$\left(2x+7\right)^2+9=\underbrace{4x^2+28x+58}_{\text{trinomio}} \qquad \text{(A)}$$

No se pierda de vista que aquí del binomio al cuadrado más la constante se partió a obtener un trinomio cuadrático. Como en matemáticas toda operación o proceso tiene su inverso o camino de retorno, la igualdad (A) puede pensarse en desarrollarse a la inversa, es decir, a partir del trinomio obtener el binomio al cuadrado más la constante, al que equivale.

Inicialmente habría que observar que del trinomio cuadrático:

a) $4x^2$ salió del cuadrado del primer término del binomio. Significa que su raíz cuadrada es el primer término del binomio.

b) $28x$ salió del doble producto del primer término del binomio por el segundo. De aquí se puede calcular fácilmente el segundo término del binomio, pues el primero ya se conoce a partir del paso anterior.

Entonces lo único que faltaría por saber es el valor de la constante que suma al binomio. Un razonamiento lógico conduce a su obtención, como se verá en los siguientes dos ejemplos.

Por ejemplo, para transformar $9x^2 + 30x + 41$ a la forma $(mx + n)^2 + h$, en donde m, n y h son números o constantes, se deduce que $9x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio, por lo tanto dicho primer término es $3x$. También, por lo dicho líneas arriba, $30x$ es el doble producto del primer término por el segundo y sabiendo que el primero es $3x$, por simples divisiones se obtiene que el segundo término del binomio es

$$30x \div 2 \div 3x = \frac{\frac{30x}{2}}{3x}$$

$$30x \div 2 \div 3x = 5$$

El binomio al cuadrado buscado es $(3x + 5)^2$. Para deducir la constante que falta en el proceso se desarrolla (de preferencia mentalmente) el binomio al cuadrado y se compara con el trinomio original. Por comparaciones se sumará y/o restará lo que haga falta para que sean iguales.

$$\underbrace{9x^2+30x+41} = \underbrace{(3x+5)^2} + \textbf{?} \qquad \text{(a)}$$

$$\overbrace{9x^2+30x+41} = \overbrace{9x^2+30x+25} + \textbf{?} \qquad \text{(b)}$$

no son iguales

En realidad, lo que está escrito del lado izquierdo del signo igual $(=)$ en el renglón (b) no es igual a lo que aparece del lado derecho. Basta observar que en ambos lados está $9x^2$; también está $30x$, pero en el lado izquierdo hay un $+41$ que no está en el derecho y en el derecho hay un $+25$ que no está en el lado izquierdo. A veces es muy directo deducir lo que hace falta para que sean iguales, como en este ejemplo, con la simple pregunta ¿Cuánto le falta al 25 para llegar al 41? Sumarle 16.

Pero no siempre es tan directo, sobretodo cuando se tienen fracciones, como se verá en los ejemplos 4 y 5. Entonces un razonamiento genérico es el siguiente: Para que realmente sean iguales basta sumar en el renglón (a) en el lado derecho el $+41$ que está en el lado izquierdo (para que así ya aparezca en ambos lados) y también restar en el lado derecho -25 que es el equivalente a "borrar" el $+25$ que no está en el original y en cambio sí está en el derecho.

De lo anterior, resulta:

$$9x^2 + 30x + 41 = (3x+5)^2 + 41 - 25$$

$$\boxed{9x^2+30x+41=(3x+5)^2+16}$$

Ejemplo 2: Transformar el trinomio $4x^2 - 28x + 45$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Si $4x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $2x$.

Si $28x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $2x$) por el segundo, este segundo término del binomio se obtiene dividiendo $- 28x \div 2 \div 2x = - 7$.

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $(2x - 7)^2$.

Pero $(2x - 7)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $4x^2-28x+45 \neq \left(2x-7\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$(2x - 7)^2 =$	cuadrado del 1er término;	menos el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadrado del 2º.

$$4x^2-28x+45 \neq 4x^2 \ - \ 28x \ + \ 49$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $4x^2$ está en ambos lados; $- 28x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un $+ 45$ que no está en el lado derecho; y además, en el lado derecho aparece un $+ 49$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $- 49$ y sumar $+ 45$ simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$4x^2-28x+45=\left(2x-7\right)^2-49+45$$

$$\boxed{4x^2-28x+45=\left(2x-7\right)^2-4}$$

Ejemplo 3: Transformar el trinomio $25x^2 - 18x + 35$ a la forma $(mx+n)^2+h$.

Solución: Si $25x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $5x$.

Si $18x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $5x$) por el segundo, este segundo término del binomio se obtiene dividiendo

$$-18x \div 2 \div 5x = -\frac{9}{5}.$$

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $\left(5x-\frac{9}{5}\right)^2$. Pero $\left(5x-\frac{9}{5}\right)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $25x^2-18x+35 \neq \left(5x-\frac{9}{5}\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$$\left(5x-\frac{9}{5}\right)^2 =$$

cuadrado del 1^er término;	menos el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadrado del 2º.

$$25x^2-18x+35 \neq 25x^2 - 18x + \frac{81}{25}$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $25x^2$ está en ambos lados; $-18x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un $+35$ que no está en el lado derecho; y además, en el lado derecho aparece un $+\frac{81}{25}$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $\frac{81}{25}$ y sumar $+35$ simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$25x^2-18x+35=\left(5x-\frac{9}{5}\right)^2-\frac{81}{25}+35$$

$$\boxed{25x^2-18x+35=\left(5x-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{794}{25}}$$

Ejemplo 4: Transformar el trinomio $9x^2+7x-6$ a la forma $(mx+n)^2+h$.

Solución: Si $9x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $3x$.

Si $7x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $3x$) por el segundo, este segundo término del binomio se obtiene dividiendo $7x \div 2 \div 3x = \frac{7}{6}$.

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2$. Pero $\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $9x^2+7x-6 \neq \left(3x+\frac{7}{6}\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$$\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2 =$$

cuadrado del 1^{er} término;	más el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadrado del 2º.

$$9x^2+7x-6 \neq 9x^2 + 7x + \frac{49}{36}$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $9x^2$ está en ambos lados; $7x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un - 6 que no está en el lado derecho; y además, en el lado derecho aparece un $-\frac{49}{36}$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $\frac{49}{36}$ y sumar - 6 simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$9x^2+7x-6=\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}-6$$

$$\boxed{9x^2+7x-6=\left(3x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{265}{36}}$$

Ejemplo 5: Transformar el trinomio $6x^2+5x+8$ a la forma $(mx+n)^2+h$.

Solución: Si $6x^2$ es el cuadrado del primer término del binomio a construir, dicho primer término es su raíz cuadrada: $\sqrt{6}\ x$.

Si $5x$ es el doble producto del primer término del binomio (que se acaba de deducir que es $\sqrt{6}\ x$) por el segundo, éste se obtiene dividiendo $5x \div 2 \div \sqrt{6}\ x = \dfrac{5}{2\sqrt{6}}$.

Ya se tiene el binomio al cuadrado: es $\left(\sqrt{6}\ x+\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2$. Pero $\left(\sqrt{6}\ x+\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2$ no es igual al trinomio original, es decir $6x^2+5x+8 \neq \left(\sqrt{6}\ x+\dfrac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2$, ya que si se desarrolla el binomio al cuadrado se obtiene:

$$\left(\sqrt{6}\ x+\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2=$$

cuadrado del 1^{er} término;	más el doble producto del 1º por el 2º;	más el cuadrado del 2º.

$$6x^2+5x+8 \neq 6x^2 \quad + \quad 5x \quad + \frac{25}{24}$$

que al compararlo con el trinomio original para ver si son iguales, se ve que $6x^2$ está en ambos lados; $+\,5x$ también. Sin embargo, en el trinomio original (lado izquierdo) hay un $+\,8$ que no está en el lado derecho (hay que agregarlo allí para que se sean iguales); y además, en el lado derecho aparece un $+\dfrac{25}{24}$ que no existe en el trinomio original. Entonces, para que realmente sean iguales, se debe restar $\dfrac{25}{24}$ y sumar $+\,8$ simultáneamente en el lado derecho, obteniendo:

$$6x^2+5x+8=\left(\sqrt{6}\;x+\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2-\frac{25}{24}+8$$

$$\boxed{6x^2+5x+8=\left(\sqrt{6}\;x+\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2+\frac{167}{24}}$$

Ejemplo 6: Transformar el trinomio $48 - 24x - 9x^2$ a la forma $(mx + n)^2 + h$.

Solución: Obsérvese que en este ejemplo, a diferencia de los anteriores, el término cuadrático es negativo. En casos así, debe encerrarse primero en un paréntesis negativo el trinomio para que se vuelva positivo el término al cuadrado, luego ordenarlo respecto de los exponentes de x y a partir de allí repetir lo que se ha hecho en los ejemplos antecedentes. Se finaliza eliminando el paréntesis negativo cambiando de signo a todo lo que contiene.

$$\begin{aligned}48-24x-9x^2&=-\left(9x^2+24x-48\right)\\&=-\left[(3x+4)^2-64\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{48-24x-9x^2=64-(3x+4)^2}$$

APLICACIÓN A LAS INTEGRALES

Lo anterior es la práctica y habilidad algebraica que se requiere para poder realizar las integrales de la forma que se estudian en este capítulo. Entonces el procedimiento general para integrar funciones que contienen un polinomio cuadrático, ya sea con o sin raíz cuadrada, en el numerador o en el denominador, consiste en transformar dicho trinomio a la forma $(mx + n)^2 + h$, y por un cambio de variable reducirla a una de las fórmulas vistas en el capítulo anterior.

Ejemplo 7: Integrar $\int \frac{dx}{4x^2+36x+85}$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx+n)+h$, conforme a lo practicado en las páginas anteriores, se tiene que

$$\int \frac{dx}{4x^2+36x+85}=\int \frac{dx}{\left(2x+9\right)^2+4}$$

Haciendo los siguientes cambios:

$u^2=(2x+9)^2$, de donde
$u=2x+9$
$du=2dx$
$a^2=4$
$a=2$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por 2 para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\left(2x+9\right)^2+4}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

Se ha reducido a la fórmula (11) de la página 32. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\,arc\ tan\,\frac{u}{a}\right)+c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral:

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,arc\ tan\,\frac{2x+9}{2}\right)+c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{4x^2+36+85}=\frac{1}{4}arc\ tan\frac{2x+9}{2}+c}$$

COMPROBACIÓN:

Simplemente para abreviar, sea $I=\frac{1}{4}arc\ tan\ \frac{2x+9}{2}+c$ (el resultado de la integral). Entonces derivando I:

$$\frac{dI}{dx}=\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx}arc\ tan\frac{2x+9}{2}\right)+\frac{d}{dx}c$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+9}{2}\right)}{\left(\frac{2x+9}{2}\right)^2+1}\right]+0$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{4x^2+36x+81}{4}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{4x^2+36x+81+4}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x^2+36x+85}\right]$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = \frac{1}{4x^2+36x+85}}$$

Ejemplo 8: Integrar $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx+n)+h$, conforme a lo practicado en las páginas anteriores, se tiene que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}$$

Haciendo los siguientes cambios:

$u^2 = (3x - 1)^2$, de donde
$u = 3x - 1$
$du = 3dx$
$a^2 = 1$
$a = 1$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por 3 para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

Se ha reducido a la fórmula (14) de la página 32. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{3}\left[ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)\right]+c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral, en donde conviene considerar que en este tipo de integrales, siempre que exista originalmente una raíz cuadrada, al sustituir en la fórmula se obtiene la raíz cuadrada original, por lo que:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \frac{1}{3}ln\left[(3x-1)+\sqrt{9x^2-6x+2}\,\right]+c}$$

Ejemplo 9: Integrar $\int \sqrt{45-20x-25x^2}\; dx$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx + n) + h$, conforme a lo practicado en las páginas anteriores, ver ejemplo 6 de la página 46, se tiene que

$$\int \sqrt{45-20x-25x^2}\; dx = \int \sqrt{49-(5x+2)^2}\; dx$$

Haciendo los siguientes cambios:

$u^2 = (5x + 2)^2$, de donde
$u = 5x + 2$
$du = 5dx$
$a^2 = 49$
$a = 7$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por 5 para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{49-(5x+2)^2}\;\; 5\,dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{a^2-u^2}\;\; du$$

Se ha reducido a la fórmula (10) de la página 32. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{5}\int \sqrt{a^2-u^2}\;\; du = \frac{1}{5}\left[\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\,arc\ sen\,\frac{u}{a}\right]+c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral, en donde conviene considerar que en este tipo de integrales, siempre que exista originalmente una raíz cuadrada, al sustituir en la fórmula se obtiene la raíz cuadrada original, por lo que:

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x+2}{2}\sqrt{45-20x-25x^2}+\frac{49}{2}\,arc\ sen\,\frac{5x+2}{7}\right]+c$$

$$\boxed{\int \sqrt{45-20x-25x^2}\;\; dx = \frac{5x+2}{10}\sqrt{45-20x-25x^2}+\frac{49}{10}\,arc\ sen\,\frac{5x+2}{7}+c}$$

Ejemplo 10: Integrar $\int \dfrac{dx}{2x^2+5x+3}$

Solución: Transformando el trinomio a la forma $(mx+n)+h$, conforme a lo practicado en los ejemplos 1 a 6, se tiene que

$$\int \frac{dx}{2x^2+5x+3} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\;x+\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}}$$

Haciendo los siguientes cambios:

$$u^2 = \left(\sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{, de donde}$$

$$u = \sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$du = \sqrt{2}\ dx$$

$$a^2 = \frac{1}{8}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{4(2)}} = \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Debe multiplicarse y dividirse simultáneamente por $\sqrt{2}$ para obtener la diferencial du y para que no se altere la integral original:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\ dx}{\left(\sqrt{2}\ x + \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Se ha reducido a la fórmula (12) de la página 32. Aplicándola se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2a} ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right] + c$$

y sustituyendo los valores particulares que a u y a a le corresponden en esta integral:

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}ln\left(\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{5}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)\right]+c$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,ln\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{4}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{6}{2\sqrt{2}}}+c$$

$$=ln\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{3}{\sqrt{2}}}+c$$

Para eliminar los denominadores parciales $\sqrt{2}$ que aparecen en el numerador y en el denominador del argumento del logaritmo natural, deben multiplicarse al mismo tiempo numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$=ln\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,x+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}+c$$

$$\boxed{\int\frac{dx}{2x^2+5x+3}=ln\frac{2x+2}{2x+3}+c}$$

COMPROBACIÓN:

Simplemente para abreviar, sea $I = ln\,\dfrac{2x+2}{2x+3}+c$ (el resultado de la integral). Entonces derivando I:

$$\frac{dI}{dx}=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+2}{2x+3}\right)}{\dfrac{2x+2}{2x+3}}+0$$

$$=\frac{\dfrac{2(2x+3)-2(2x+2)}{(2x+3)^2}}{\dfrac{2x+2}{2x+3}}$$

$$=\frac{\dfrac{4x+6-4x-4}{(2x+3)^2}}{\dfrac{2x+2}{2x+3}}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{(2x+3)^2}}{\dfrac{2x+2}{2x+3}}$$

$$=\frac{2(2x+3)}{(2x+3)^2(2x+2)}$$

$$=\frac{2(2x+3)}{2(2x+3)^2(x+1)}$$

$$=\frac{1}{(2x+3)(x+1)}$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx}=\frac{1}{2x^2+5x+3}}$$

EJERCICIO 5.1

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{25x^2+10x+10}$

2) $\int \frac{dx}{16x^2-24x-7}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-42x+50}}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-20x+50}}$

5) $\int \sqrt{4x^2-28x-32}\, dx$

6) $\int \sqrt{36x^2+12x+10}\, dx$

7) $\int \frac{dx}{36x^2+60x-11}$

8) $\int \frac{dx}{64x^2+144x+162}$

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{72-6x-x^2}}$

10) $\int \sqrt{20x-4x^2-24}\;dx$

11) $\int \dfrac{dx}{117+12x-9x^2}$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{168-20x-100x^2}}$

13) $\int \sqrt{25x^2+18x-8}\;dx$

14) $\int \dfrac{dx}{4x^2-14x-1}$

15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16x^2-7x-2}}$

16) $\int \dfrac{dx}{49x^2+9x-6}$

17) $\int \sqrt{3x^2+x+9}\;dx$

18) $\int \dfrac{dx}{5x^2+11x-13}$

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{7x^2+11x+22}}$

20) $\int \dfrac{dx}{8x^2-19x}$

21) $\int \sqrt{x^2-17x}\;dx$

22) $\int \dfrac{dx}{12x^2+x-8}$

23) $\int \dfrac{dx}{15x^2+11x}$

24) $\int \sqrt{7x^2+7}\;dx$