III

FÓRMULA DE LA POTENCIA

Las fórmulas vistas en el capítulo anterior fueron muy específicas para integrales de x elevada a cualquier potencia; sin embargo, no siempre, o más bien, pocas veces lo que está elevado a la potencia n es la pura variable x, sino una función completa. Para eso, de manera muy similar a lo que ocurrió con las derivadas, se requieren fórmulas generales. Todas las fórmulas que se verán de aquí en adelante son fórmulas generales, es decir en términos de u, no de x.

Y algo muy importante: para cada fórmula general, de aquí en adelante, debe emplearse un procedimiento llamado *cambio de variable,* el cual se explicará con detalle en cada uno de los ejemplos siguientes. El estudiante que no aprenda, a hacer cambios de variable para integrar, está condenado a no poder integrar ninguna función.

Para todo cambio de variable:

a) Seleccionar u;
b) Una vez hecha la elección de u, calcular inmediatamente después la diferencial de u, es decir, du.

Todo cambio de variable debe transformar la integral original en una fórmula.

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

FÓRMULA DE LA POTENCIA Y SU EXCEPCIÓN:

(6) $$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad , \qquad \text{para } n \neq -1$$

(7) $$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

La fórmula (6) puede emplearse siempre que n sea diferente de *menos uno*, ya que si vale *menos uno* el denominador de la fórmula se vuelve cero y hay que recordar que en matemáticas no se vale dividir entre cero porque da infinito.

En caso de que n valga *menos uno* se obtiene realmente la fórmula (7).

Ejemplo 1: Integrar $\int (3x - 2)^7 \, dx$

Solución: Obsérvese que lo que está elevado a la séptima potencia no es la variable x, sino el polinomio $3x - 2$. Por lo tanto, no puede emplearse la fórmula (2), sino la (6), lo que significa que u debe ser $3x - 2$.

Si $u = 3x - 2$, entonces calculando la diferencial de u se obtiene que
$du = 3dx$

La fórmula (6) habla de $\int u^n du$, es decir que no basta tener identificado qué es u, sino que pide tener la *diferencial de u*, o sea, du. En este ejemplo, dicha diferencial du es $3dx$, lo que significa que para poder emplear la fórmula (6) debe tenerse en la integral original $3dx$. Pero nada más se tiene dx, le falta el 3.

Si la integral original se multiplica por 3 se consigue tener $3dx$; pero si se hace esto, para que siga siendo lo mismo debe dividirse también entre 3. Haciéndolo:

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$\int (3x-2)^7\,dx = \int (3x-2)^7 \left(\frac{1}{3}\right)(3)\,dx$$

se <u>divide</u> y se <u>multiplica</u> por tres al mismo tiempo

Por la fórmula (3) de la página 9, cualquier constante que esté multiplicando se puede echar afuera de la integral, por lo que la fracción un tercio se echa para afuera, quedando:

$$\int (3x-2)^7\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3x-2)^7}_{u}\ \underbrace{3\,dx}_{du}$$

En este momento se ha completado el cambio de variable y la integral original convertida en fórmula ya puede escribirse como

$$\int (3x-2)^7\,dx = \frac{1}{3}\int u^7\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{u^{7+1}}{7+1}\right] + c = \frac{u^8}{24} + c$$

Una vez integrado al haber aplicado la fórmula correspondiente, se debe regresar a la variable original, sustituyendo u por lo que vale. En este caso, recordar que $u = 3x - 2$:

$$\boxed{\int (3x-2)^7\,dx = \frac{(3x-2)^8}{24} + c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 2: Integrar $\int \sqrt{11x+8}\ dx$

Solución: Debe escribirse como $\int (11x+8)^{1/2}\, dx$

Obsérvese que lo que está elevado a la potencia un medio no es la variable x, sino el polinomio $11x + 8$. Por lo tanto, no puede emplearse la fórmula (2), sino la (6), lo que significa que u debe ser $11x + 8$.

Si $u = 11x + 8$, entonces calculando la diferencial de u se obtiene que

$du = 11dx$

La fórmula (6) habla de $\int u^n du$, es decir que no basta tener identificado qué es u, sino que pide tener la *diferencial de u*, o sea, du. En este ejemplo, dicha diferencial du es $11dx$, lo que significa que para poder emplear la fórmula (6) debe tenerse en la integral original $11dx$. Pero nada más se tiene dx, le falta el 11.

Si la integral original se multiplica por 11 se consigue tener $11dx$; pero si se hace esto, para que siga siendo lo mismo debe dividirse también entre 11. Haciéndolo:

$$\int (11x+8)^{1/2}\, dx = \int (11x+8)^{1/2} \left(\frac{1}{11}\right)(11)\, dx$$

se divide y

se multiplica por 11 al mismo tiempo

Por la fórmula (3) de la página 9, cualquier constante que esté multiplicando se puede echar afuera de la integral, por lo que la fracción un onceavo se echa para afuera, quedando:

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$\int (11x+8)^{1/2}\,dx = \frac{1}{11}\int \underbrace{(11x+8)^{1/2}}_{u}\ \underbrace{11\,dx}_{du}$$

En este momento se ha completado el cambio de variable y la integral original convertida en fórmula ya puede escribirse como

$$\int (11x+8)^{1/2}\,dx = \frac{1}{11}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{11}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + c \;=\; \frac{1}{11}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{2u^{3/2}}{33} + c$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

Una vez integrado al haber aplicado la fórmula correspondiente, se debe regresar a la variable original, sustituyendo u por lo que vale. En este caso, recordar que $u = 11x+8$:

$$\boxed{\int \sqrt{11x+8}\,dx = \frac{2(11x+8)^{3/2}}{33} + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{4x-10}$

Solución: En este caso, la fórmula a emplear es la (7), para lo cual debe hacerse

$u = 4x - 10$ de donde

$du = 4dx$

La fórmula (7) habla de $\int \frac{du}{u}$, es decir que no basta tener identificado qué es u, sino que pide tener la *diferencial de u*, o sea, du. En este ejemplo, dicha diferencial du es $4dx$, lo que significa que para poder emplear la fórmula (7) debe tenerse en la integral original $4dx$. Pero nada más se tiene dx, le falta el 4.

Si la integral original se multiplica por 4 se consigue tener $4dx$; pero si se hace esto, para que siga siendo lo mismo debe dividirse también entre 4. Haciéndolo:

$$\int \frac{dx}{4x-10} = \int \frac{\left(\frac{1}{4}\right)(4)\,dx}{4x-10}$$

Por la fórmula (3) de la página 9, cualquier constante que esté multiplicando se puede echar afuera de la integral, por lo que la fracción un cuarto se echa para afuera, quedando:

$$\int \frac{dx}{4x-10} = \frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{4\,dx}^{du}}{\underbrace{4x-10}_{u}}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4} ln\, u + c$$

Y regresando a la variable original, sustituyendo u por $4x - 10$:

$$\boxed{\int \frac{dx}{4x-10} = \frac{1}{4} ln(4x-10) + c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 4: Integrar $\int x\left(5x^2-6\right)^4 dx$

Solución: La integral se puede escribir como $\int\left(5x^2-6\right)^4 x\,dx$. Si se hace $u = 5x^2 - 6$, entonces su diferencial es $du = 10x\,dx$. En la integral original solamente se tiene $x\,dx$, por lo que le falta un 10 multiplicando, pero para que no se altere, se debe dividir entre 10 también.

Por lo visto en los ejemplos anteriores, en estos momentos ya se sabe que el factor $\frac{1}{10}$ "no sirve", por lo que se tiene que sacar de la integral. Resulta:

$$\int\left(5x^2-6\right)^4 x\,dx = \frac{1}{10}\int \underbrace{\left(5x^2-6\right)}_{u}{}^4\ \underbrace{10x\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{10}\int u^4 du = \frac{1}{10}\left[\frac{u^{4+1}}{4+1}\right]+c$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{u^5}{5}\right]+c = \frac{u^5}{50}+c$$

Y regresando a la variable original, sabiendo que $u = 5x^2 - 6$, se llega a:

$$\boxed{\int x\left(5x^2-6\right)^4 dx = \frac{\left(5x^2-6\right)^5}{50}+c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 5: Integrar $\displaystyle\int \frac{4x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3}$

Solución: Sea $u = 7x^2 - 9$, de donde

$du = 14x\,dx$

Si en la integral original estuviera en el numerador $14x\,dx$ en vez de $4x\,dx$, se tendría la diferencial de u , o sea du, que es lo que pide la fórmula; pero no es así. Sin embargo, el problema se arregla muy fácil: la constante 4 que "no sirve" se echa para fuera de la integral. Luego se multiplica y se divide simultáneamente por 14, lo que queda así:

$$4\int \frac{\left(\frac{1}{14}\right)(14)\,x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} = \frac{4}{14}\int \frac{\overbrace{14x\,dx}^{du}}{\underbrace{\left(7x^2-9\right)^3}_{u^3}}$$

$$= \frac{4}{14}\int \frac{du}{u^3} = \frac{2}{7}\int u^{-3}du$$

$$= \frac{2}{7}\left[\frac{u^{-3+1}}{-3+1}\right] + c = \frac{2}{7}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right] + c$$

$$= \frac{2}{-14u^2} + c$$

Simplificando y regresando a la variable original se llega finalmente a

$$\boxed{\int \frac{4\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} = -\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2} + c}$$

Otra forma más directa de hacer el cambio de variable es multiplicando por $\frac{4}{14}$ y $\frac{14}{4}$ así:

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

Sea $\quad u = 7x^2 - 9$, $\quad$ de donde
$du = 14x\,dx$

$$\int \frac{\left(\frac{4}{14}\right)\left(\frac{14}{4}\right)4x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} = \frac{4}{14}\int \frac{\left(\frac{14}{4}\right)4x\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3}$$

$$= \frac{4}{14}\int \frac{14xdx}{\left(7x^2-9\right)^3} \quad \begin{matrix} \leftarrow du \\ \leftarrow u^3 \end{matrix}$$

$$= \frac{4}{14}\int \frac{du}{u^3} = \frac{2}{7}\int u^{-3}du$$

$$= \frac{2}{7}\left[\frac{u^{-3+1}}{-3+1}\right] + c = \frac{2}{7}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right] + c$$

$$= \frac{2}{-14u^2} + c$$

Simplificando y regresando a la variable original se llega finalmente a

$$\boxed{\int \frac{4\,dx}{\left(7x^2-9\right)^3} = -\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2} + c}$$

COMPROBACIÓN: La comprobación consiste simplemente en derivar el resultado obtenido:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2} + c\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2}\right) + \frac{d}{dx}c$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$= -\frac{1}{7}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left(7x^2-9\right)^2}\right)+0$$

$$= -\frac{1}{7}\frac{d}{dx}\left(7x^2-9\right)^{-2}$$

$$= -\frac{1}{7}\left[-2\left(7x^2-9\right)^{-2-1}\frac{d}{dx}\left(7x^2-9\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{7}\left[-2\left(7x^2-9\right)^{-3}(14x)\right]$$

$$= -\frac{28x}{7\left(7x^2-9\right)^3}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{7\left(7x^2-9\right)^2}+c\right]=\frac{4x}{\left(7x^2-9\right)^3}}$$

Que es lo que se integró.

Ejemplo 6: Integrar $\int (x-1)\left(x^2-2x-8\right)^7 dx$

Solución: Sea $u = x^2 - 2x - 8$ de donde
$du = (2x - 2)\,dx$

Si se multiplica por 2 la integral original se obtiene la diferencial de u .Obviamente, debe dividirse también entre 2:

$$\frac{1}{2}\int 2(x-1)\left(x^2-2x-8\right)^7 dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\left(x^2-2x-8\right)}_{u}{}^7\underbrace{(2x-2)\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^7 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{7+1}}{7+1}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^8}{8}\right] + c = \frac{u^8}{16} + c$$

$$\boxed{\int (x-1)\left(x^2-2x-8\right)^7 dx = \frac{\left(x^2-2x-8\right)^8}{16} + c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 7: Integrar $\int \frac{(5x-10)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}}$

Solución: Sea $u = 3x^2 - 12x + 1$ de donde
$du = (6x - 12)dx$

Los ejemplos anteriores deben haber capacitado al alumno para que sea capaz en este ejemplo de analizar por su propia cuenta el manejo de las constantes que se va a hacer:

$$\int \frac{(5x-10)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}} = \int \frac{5(x-2)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}}$$

$$= 5\int \frac{6(x-2)\,dx}{6\sqrt{3x^2-12x+1}}$$

$$= \frac{5}{6}\int \frac{(6x-12)\,dx}{\sqrt{3x^2-12x+1}}$$

$$= \frac{5}{6}\int \left(3x^2-12x+1\right)^{-1/2}(6x-12)\,dx$$

$$= \frac{5}{6}\int u^{-1/2}du$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] + c$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{5}{6}\left[2\sqrt{3x^2 - 12x + 1}\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{(5x-10)\,dx}{\sqrt{3x^2 - 12x + 1}} = \frac{5\sqrt{3x^2 - 12x + 1}}{3} + c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 8: Integrar $\int \frac{(3x+12)\,dx}{x^2 + 8x - 7}$

Solución: Sea $u = x^2 + 8x - 7$, de donde
$du = (2x + 8)dx$

Nuevamente se deja al estudiante analizar por su propia cuenta el manejo de las constantes que se va a hacer:

$$\int \frac{(3x+12)\,dx}{x^2 + 8x - 7} = \int \frac{3(x+4)\,dx}{x^2 + 8x - 7}$$

$$=3\int\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x+4)\,dx}{x^2+8x-7}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+8)\,dx}{x^2+8x-7}\quad\begin{array}{l}\longleftarrow du\\ \longleftarrow u\end{array}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{3}{2}\ln u+c$$

Y regresando a la variable original se llega a que

$$\boxed{\int\frac{(3x+12)\,dx}{x^2+8x-7}=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+8x-7\right)+c}$$

Ejemplo 9: Integrar $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+10}$

Solución: Sea $u=e^{2x}+10$, de donde

$du=2e^{2x}dx$

Entonces

$$\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+10}=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}+10}\quad\begin{array}{l}\longleftarrow du\\ \longleftarrow u\end{array}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln u+c$$

Y regresando a la variable original:

$$\boxed{\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+10}=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+10\right)+c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

EJERCICIO 3.1

Realizar las siguientes integrales por medio de un cambio de variable:

1) $\int (13x-12)^7\, dx$

2) $\int (2-19x)^{11}\, dx$

3) $\int \sqrt{7x-15}\, dx$

4) $\int \frac{dx}{8x-13}$

5) $\int \frac{6\,dx}{(15x+11)^9}$

6) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{9-4x}}$

7) $\int x\left(3x^2-11\right)^8 dx$

8) $\int \frac{3x\,dx}{\left(3x^2-1\right)^4}$

9) $\int (x+8)\left(5x^2+80x+22\right)^3 dx$

10) $\int \frac{(x-1)\,dx}{\left(4x^2-8x\right)^6}$

11) $\int (4x+1)\sqrt{6x^2+3x+11}\, dx$

12) $\int \frac{(10x+15)\,dx}{\sqrt{7x^2+21x-9}}$

13) $\int \frac{\left(4x^2+12\right)dx}{\left(x^3+9x\right)^2}$

14) $\int e^{3x}\left(e^{3x}-8\right)^5 dx$

15) $\int (3x-3)\sqrt[5]{\left(5x^2-10x+9\right)^2}\; dx$

16) $\int \frac{\left(4x^2+2\right)dx}{\sqrt[4]{\left(8x^3+12x-1\right)^3}}$

17) $\int \frac{\left(8x^3+8x\right)dx}{x^4+2x^2-9}$

18) $\int \frac{\left(7x^2+7x\right)dx}{\left(2x^3+3x^2-9\right)^8}$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro