II

LA INTEGRACIÓN. FÓRMULAS FUNDAMENTALES

La integración es la operación inversa a la derivación. El símbolo de integración es $\int$, aunque en realidad no puede considerarse separado de la diferencial, o sea que en $\int F(x)\,dx$ la función $F(x)$ es lo que se integra y de alguna manera puede considerarse enmedio del símbolo $\int$ y de la diferencial dx.

De tal manera que si $y = f(x)$ es la función original, su derivada es $\frac{dy}{dx} = F(x)$; entonces la integral de esta última regresa a la función original, es decir

$$\int F(x)\,dx = f(x)$$

Por ejemplo, si la función original es $y = x^2$, su derivada es otra función de equis, en este caso, $2x$. Por lo tanto, si se integra $2x$ se regresa a la función original x^2:

$$\int 2x\,dx = x^2 \qquad \text{(a)}$$

Sin embargo, si $y = x^2 + 2$, su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad \text{(la misma que de la función } y = x^2 \text{)}$$

y, por lo tanto, su integral es la función original, esto es que

$$\int 2x\, dx = x^2 + 2 \qquad \text{(b)}$$

Pero obsérvese que tanto (a) como (b) son la misma integral $\int 2x\, dx$ y sin embargo tienen diferente resultado. Esto se debe a que cualquier función que termine en la suma de una constante, al derivarse dicha función se obtiene cero al final como resultado de la derivada de la constante final. Entonces al integrar debe agregarse siempre un término constante $+ C$. Así aparecerán todas las fórmulas de integración.

Una integral de una función $F(x)$, visto de otra forma, es lo mismo que preguntarse: ¿La derivada de qué otra función da $F(x)$? Así, en los ejemplos recientes, la integral $\int 2x\, dx$ equivale a preguntarse ¿la derivada de qué da $2x$? Y la respuesta es la derivada de x^2; pero también de, por ejemplo, $x^2 + 2$; o de $x^2 + 5$; o de $x^2 + 23$. En general, de $x^2 + C$.

FÓRMULAS FUNDAMENTALES

Son cinco las fórmulas fundamentales o más elementales de integración:

(1) $$\int dx = x + c$$

(2) $$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{, para } n \neq -1$$

(3) $$\int c\, u\, dx = c \int u\, dx$$

(4) $$\int (u + v + w + \ldots)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx + \int w\, dx + \ldots$$

(5) $$\int \frac{dx}{x} = ln\, x + c$$

En donde: c = constante.
$u, v, w, \ldots$ = funciones o variables.

La fórmula (2) funciona para todos los valores de n, excepto para cuando $n = -1$, porque vuelve cero el denominador. Cuando $n = -1$ se tiene la fórmula (5).

Ejemplo 1: Integrar $\int x^6\, dx$

Solución: Por la fórmula (2):

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c$$

$$\boxed{\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + c}$$

COMPROBACIÓN:

Una integral, por su propia definición, se comprueba derivando su resultado:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^7}{7} + c\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^7}{7}\right) + \frac{d}{dx} c$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{d}{dx}x^7\right) + 0$$

$$= \frac{1}{7}\left(7x^6\right)$$

$$= x^6$$

que es lo que se integró.

Ejemplo 2: Integrar $\int 24x^2 dx$

Solución: Por la fórmula (3), la constante se echa para afuera de la integral:

$$\int 24x^2\ dx = 24\int x^2\ dx$$

Ahora empleando la fórmula (2):

$$= 24\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] + c$$

$$= \frac{24\ x^3}{3} + c$$

$$\boxed{\int 24x^2\ dx = 8x^3 + c}$$

COMPROBACIÓN:

Derivando el resultado de esta integral:

$$\frac{d}{dx}\left(8x^3 + c\right) = \frac{d}{dx}8x^3 + \frac{d}{dx}c$$

$$= 24x^2$$

que es lo que se integró.

Ejemplo 3: Integrar $\int 7x^9 \, dx$

Solución: Por la fórmula (3), la constante se echa para afuera de la integral:

$$\int 7x^9 dx = 7\int x^9 dx$$

Ahora empleando la fórmula (2):

$$7\int x^9 dx = 7\left[\frac{x^{9+1}}{9+1}\right] + c$$

$$\boxed{\int 7x^9 dx = \frac{7x^{10}}{10} + c}$$

Ejemplo 4: Integrar $\int \left(6x^2 + 8x - 9\right) dx$

Solución Empleando primeramente la fórmula (4) de la suma:

$$\int \left(6x^2 + 8x - 9\right)dx = \int 6x^2 dx + \int 8x dx - \int 9 dx$$

Para cada una de las tres integrales pendientes se utiliza la fórmula (3), donde la constante se echa para afuera de la integral:

$$\int 6x^2 dx + \int 8x dx - \int 9 dx = 6\int x^2 dx + 8\int x dx - 9\int dx$$

Ahora, para las dos primeras integrales debe usarse la fórmula (2) y para la tercera integral la fórmula (1):

$$\int 6x^2dx + \int 8xdx - \int 9dx = 6\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] + 8\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] - 9\left[x\right] + c$$

$$= \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 9x + c$$

$$\boxed{\int\left(6x^2 + 8x - 9\right) dx = 2x^3 + 4x^2 - 9x + c}$$

Ejemplo 5: Integrar $\int\left(4x^2 - x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}\right)dx$

Solución Empleando primeramente la fórmula (4) de la suma:

$$\int\left(4x^2 - x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}\right)dx = \int 4x^2dx - \int x\,dx + \int \frac{5}{4}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 4\int x^2dx - \int xdx + \frac{5}{4}\int dx - \int \frac{dx}{x}$$

Para la primera y segunda integral se emplea la fórmula (2) ; para la tercera integral la fórmula (1) y para la cuarta integral la fórmula (5) :

$$= 4\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x - ln\,x + c$$

$$\boxed{\int\left(4x^2 - x + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{4} - ln\,x + c}$$

Ejemplo 6: Integrar $\int \sqrt{x^7}\ dx$

Solución: En estas integrales debe escribirse la función con exponente fraccionario para convertirla a la forma u^n:

$$\int \sqrt{x^7}\ dx = \int x^{7/2} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + c = \frac{x^{9/2}}{\frac{9}{2}} + c$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^7}\ dx = \frac{2x^{9/2}}{9} + c}$$

Ejemplo 7: Integrar $\int \frac{dx}{x^9}$

Solución: Escribiendo la función con exponente negativo:

$$\int \frac{dx}{x^9} = \int x^{-9}\ dx$$

$$= \frac{x^{-9+1}}{-9+1} + c = \frac{x^{-8}}{-8} + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^9} = \frac{1}{-8x^8} + c}$$

Ejemplo 8: Integrar $\int \frac{11\,dx}{6\,\sqrt[3]{x^5}}$

Solución: Escribiendo con exponente fraccionario y negativo la función y afuera de la integral la constante, se tiene que:

$$\int \frac{11\,dx}{6\,\sqrt[3]{x^5}} = \frac{11}{6}\int x^{-5/3}dx$$

$$= \frac{11}{6}\left[\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + c\right] = \frac{11}{6}\left[\frac{x^{-2/3}}{-\frac{2}{3}} + c\right]$$

$$= \frac{11}{6}\left[\frac{3}{-2\,x^{2/3}} + c\right] = \frac{33}{-12x^{2/3}} + c$$

$$\boxed{\int \frac{11\,dx}{6\,\sqrt[3]{x^5}} = \frac{11}{-4x^{2/3}} + c}$$

Ejemplo 9: $\int\left(9x^2 - 6x + \frac{4}{x}\right)dx$

Solución: Empleando primeramente la fórmula (4) de la suma:

$$\int\left(9x^2 - 6x + \frac{4}{x}\right)dx = \int 9x^2\,dx - \int 6x\,dx + \int \frac{4}{x}\,dx$$

Ahora con la fórmula (3) de la constante para cada una de ellas:

$$= 9\int x^2\,dx - 6\int x\,dx + 4\int \frac{dx}{x}$$

Para las dos primeras integrales debe utilizarse la fórmula (2) de la potencia y para la tercera integral la fórmula (5):

$$= 9\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] - 6\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] + 4\left[ln\ x\right] + c$$

$$= \frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 4\,ln\,x + c$$

$$\boxed{\int\left(9x^2 - 6x + \frac{4}{x}\right)dx = 3x^3 - 3x^2 + 4\,ln\,x + c}$$

EJERCICIO 2.1

1) $\int x^{11}dx$

2) $\int x^{10}dx$

3) $\int 6x dx$

4) $\int 9x^6 dx$

5) $\int (6x-5)dx$

6) $\int (11x^3 - 9x^2 + x - 5)dx$

7) $\int (7x^2 + 8x - 2)dx$

8) $\int (3x^2 + 10x - 11)dx$

9) $\int \frac{dx}{x^4}$

10) $\int \frac{dx}{2x}$

11) $\int \left(8x^3 - \frac{4}{3x^2} + \frac{2}{5x}\right)dx$

12) $\int \left(\frac{3}{5\sqrt{x^9}} + \frac{5\sqrt{x^9}}{3}\right)dx$

13) $\int \left(\frac{6}{11x} - \frac{11x}{6}\right)dx$

14) $\int \left(\frac{9}{2x^5} + \frac{2x^5}{9}\right)dx$

15) $\int \left(\frac{11}{10\sqrt[5]{x^8}} + \frac{10\sqrt[5]{x^8}}{11}\right)dx$

16) $\int \left(\frac{13}{11\sqrt[13]{x^4}} - \frac{11\sqrt[13]{x^4}}{13}\right)dx$