XI

LA INTEGRAL DEFINIDA

De manera un poco burda, en virtud de que este no es un curso de análisis matemático riguroso, se puede decir que todas las integrales estudiadas y calculadas en los capítulos anteriores son integrales indefinidas, en el sentido de que no queda definida la integral en un valor numérico concreto, sino en otra función. Por ejemplo, de la integral $\int 2x\,dx$ lo más que se puede saber de ella hasta ahora por lo estudiado en los capítulos anteriores es que es igual a la función $x^2 + c$.

Por el contrario, cuando de una integral de obtiene un valor numérico concreto se dice que es una *integral definida*. Eso es lo que se va a estudiar en este capítulo, o sea, cómo convertir en un valor numérico una integral indefinida. Para ello es necesario establecer desde qué valor inicial de x hasta qué valor final se evaluará la integral. Dichos valores se llaman *límites de integración* y se dice que se integra desde $x = a$ hasta $x = b$. Su notación es $\int_a^b f(x)\,dx$

El proceso consta de dos pasos: Primero integrar y después evaluar (darle valores). Si el resultado de la integral es $F(x)$, o sea que $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, para denotar que la función ya se ha integrado, pero no se ha evaluado aún, se emplea la notación

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Luego se evalúa, conforme a la siguiente regla:

Si $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, ***entonces*** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

que significa evaluar el resultado de la integración en el límite superior menos el límite inferior.

Ejemplo 1: $\int_1^3 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_1^3 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x\Big|_1^3$$

$$= 2x^3 + 2x^2 - x\Big|_1^3$$

y ahora evaluando:

$$= \underbrace{2(3)^3 + 2(3)^2 - 3}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[2(1)^3 + 2(1)^2 - 1\right]}_{\text{límite inferior}}$$

$$= 66$$

Significa que la integral vale en concreto 66, es decir,

$$\boxed{\int_1^3 \left(6x^2 + 4x - 1\right) dx = 66}$$

Ejemplo 2: $\int_3^8 \sqrt{x+1}\ dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_3^8 \sqrt{x+1}\ dx = \left.\frac{2\left(x+1\right)^{3/2}}{3}\right|_3^8$$

Y ahora evaluando:

$$= \underbrace{\frac{2}{3}\left(8+1\right)^{3/2}}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\frac{2}{3}\left(3+1\right)^{3/2}}_{\text{límite inferior}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(9\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(4\right)^{3/2}$$

Elevar un número a la potencia tres medios ($\frac{3}{2}$) significa elevarlo al cubo y luego sacarle raíz cuadrada, o a la inversa, primero sacarle raíz cuadrada y luego elevarlo al cubo. Entonces sacando primero raíz cuadrada (es el denominador 2 del exponente):

$$= \frac{2}{3}\left(3\right)^3 - \frac{2}{3}\left(2\right)^3$$

$$= \frac{2}{3}\left(27\right) - \frac{2}{3}\left(8\right)$$

$$= 18 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{38}{3}$$

Significa que la integral vale en concreto $\frac{38}{3}$, es decir

$$\boxed{\int_3^8 \sqrt{x+1}\;dx = \frac{38}{3}}$$

Ejemplo 3: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\;dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\,arcsen\,\frac{x}{2}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\,arc\;sen\,\frac{x}{2}\Bigg|_0^2$$

y luego evaluando:

$$= \underbrace{\frac{2}{2}\sqrt{4-2^2} + 2\,arcsen\,\frac{2}{2}}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[\frac{0}{2}\sqrt{4-0^2} + 2\,arc\;sen\,\frac{0}{2}\right]}_{\text{límite inferior}}$$

$$= 0 + 2\;arc\;sen\,1 - 0 - 0$$

$$= 2\;arc\;sen\,1$$

Los valores de las funciones trigonométricas inversas son ángulos, los cuales deben siempre expresarse en radianes, no en grados. En este caso, el *seno inverso* de 1 es 90º que equivale a $\frac{\pi}{2}$ radianes, de manera que continuando con la evaluación de la integral, se obtiene

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

o sea que

$$\boxed{\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx = \pi}$$

Ejemplo 4: $\int_0^{\pi/2} (1 + cos\, x)\, dx$

Solución: Integrando primero se obtiene que

$$\int_0^{\pi/2} (1 + cos\, x)\, dx = x + sen\, x \Big|_0^{\pi/2}$$

y evaluando después:

$$= \underbrace{\frac{\pi}{2} + sen\,\frac{\pi}{2}}_{\text{límite superior}} - \underbrace{\left[0 + sen\, 0\right]}_{\text{límite inferior}}$$

Cuando π no es parte del argumento de una función trigonométrica debe tomarse su valor como 3.1415926; si, en cambio, es parte del argumento de una función trigonométrica debe tomarse π como un ángulo dado en radianes. En este ejemplo, el primer valor no es parte de un argumento, mientras que el segundo sí, por lo que

$$= \frac{3.1415926}{2} + sen\, 90$$

$$= 2.570796$$

Recordar que $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) radianes = sen\, 90\ grados = 1$

es decir que

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)\, dx = 2.570796}$$

EJERCICIO 11.1

Calcular el valor de las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^4 \left(x^2 - 9x\right) dx$

2) $\int_2^5 \left(x^3 - x^2 + 8\right) dx$

3) $\int_1^4 \frac{dx}{\left(3-5x\right)^2}$

4) $\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\ dx$

5) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$

6) $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\ dx$

7) $\int_0^2 \frac{dx}{9x^2 + 36}$

8) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(2x - sen\,2x\right) dx$

9) $\int_0^{\pi/6} \left(1 + cos\,3x\right) dx$

10) $\int_1^3 \frac{dx}{4x}$