I

LA DIFERENCIAL

Cuando se tiene una función cualquiera, por ejemplo, $y = x^2 - 5x - 9$, conforme a lo visto en el semestre anterior, su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5 \qquad \text{(I)}$$

cabría decir que del símbolo operador derivada, el numerador dy se llama diferencial de *ye*, mientras que el denominador dx se llama diferencial de x. Si se despeja la diferencial de *ye* se obtiene

$$dy = (2x - 5)\,dx \qquad \text{(II)}$$

Sin entrar en detalles rigurosos, la diferencial de x es igual al incremento de x, es decir que $dx = \Delta x$, mientras que la diferencial de *ye*, según se ve en la igualdad (II), es igual a la derivada de la función por la diferencial de x. Ésta última es la que se tomará como regla para el cálculo de diferenciales en los ejemplos siguientes.

Una diferencial es un elemento infinitesimal, es decir, un elemento que tiende a cero.

Ejemplo 1: Calcular la diferencial dy de la función $y = x^3 - 7x^2 + 4$.

Solución: Se puede ver desde dos enfoques un poco distintos. El primero consiste en derivar y luego despejar dy. Haciéndolo:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x$$

de donde

$$\boxed{dy = \left(3x^2 - 14x\right)dx}$$

El segundo enfoque, más directo, consiste en aplicar directamente la regla, es decir, la diferencial de *ye* es igual a la derivada de la función por la diferencial de x, que no es otra cosa que el resultado anterior.

Ejemplo 2: Calcular dy si $y = \sqrt{5x - 4}$

Solución: La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(5x - 4\right)}{2\sqrt{5x - 4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x - 4}}$$

de donde

$$\boxed{dy = \frac{5\,dx}{2\sqrt{5x - 4}}}$$

Ejemplo 3: Calcular dy si $y = \left(4x - 7\right)^8$

Solución: La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 8(4x-7)^7 \frac{d}{dx}(4x-7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 8(4x-7)^7 (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 32(4x-7)^7$$

de donde

$$\boxed{dy = 32(4x-7)^7\, dx}$$

Ejemplo 4: Calcular la diferencial dy si $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}$

Solución: Derivando, a partir de que $y = (4x-1)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(4x-1)^{-3/2} \frac{d}{dx}(4x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(4x-1)^{-3/2}(4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{2(4x-1)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(4x-1)^{3/2}}$$

de donde

$$\boxed{dy = -\frac{2\,dx}{(4x-1)^{3/2}}}$$

Ejemplo 5: Calcular la diferencial dy si $y = ln\ 2x$

Solución: Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}2x}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

de donde

$$dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\boxed{dy = \frac{dx}{x}}$$

Ejemplo 6: Calcular la diferencial dy si $y = tan^3(2-9x)$.

Solución: Derivando, a partir de que la y original es lo mismo que

$$y = \left[tan(2-9x)\right]^3$$

Empleando la fórmula de u^n:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left[tan\left(2-9x\right)\right]^2 \frac{d}{dx} tan\left(2-9x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,tan^2\left(2-9x\right) sec^2\left(2-9x\right) \frac{d}{dx}\left(2-9x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,tan^2\left(2-9x\right) sec^2\left(2-9x\right)\left(-9\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,27\,tan^2\left(2-9x\right) sec^2\left(2-9x\right)$$

de donde

$$\boxed{dy = -\,27 tan^2\left(2-9x\right) sec^2\left(2-9x\right) dx}$$

EJERCICIO 1.1

Calcular la diferencial dy de las siguientes funciones:

1) $y = x^5 - 7x + 8$

2) $y = 5x^3 + 5x^2 - x$

3) $y = \dfrac{6}{4x^2 - 63}$

4) $y = \sqrt{9 - 5x^7}$

5) $y = \sqrt[7]{2x^4 - 8x^3 + x}$

6) $y = \dfrac{7}{\sqrt{9 - 2x}}$

7) $y = \dfrac{5}{\left(x^3 - 3x^2 + 9x\right)^4}$

8) $y = \dfrac{11}{\left(6 - 7x^4\right)^9}$

9) $y = \dfrac{3}{\sqrt[5]{\left(x - 6x^6\right)^9}}$

10) $y = sen\left(5x - 7\right)$

11) $y = cos\left(3x - 4x^7\right)$

12) $y = tan\sqrt{2x - 9}$

13) $y = sec\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

14) $y = ln\sqrt{x^7}$

15) $y = e^{4x}$

16) $y = e^{\sqrt{3x}}$