Tercera parte

TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA

TEMA 10

BINOMIO DE NEWTON

Los productos notables tienen la finalidad de obtener el resultado de ciertas multiplicaciones sin hacer dichas multiplicaciones. Por ejemplo, cuando se desean multiplicar los binomios conjugados siguientes: $\left(7xy^2+3a\right)\left(7xy^2-3a\right)$, para evitar realizar las operaciones correspondientes a fin de obtener el resultado

$$\begin{array}{llll} 7xy^2 & +3a & & \\ 7xy^2 & -3a & & \\ \hline 49x^2y^4 & +21axy^2 & & \\ & -21axy^2 & -9a^2 \\ \hline 49x^2y^4 & & -9a^2 \end{array}$$

se conoce la regla de los binomios conjugados que establece que el resultado es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo, con lo que directamente se obtiene, sin necesidad de realizar toda la operación, que

$$\left(7xy^2+3a\right)\left(7xy^2-3a\right)=49x^2y^4-9a^2$$

De manera semejante, para obtener el resultado sin efectuar operaciones de elevar un binomio $\left(x+y\right)$ a cierta potencia n, en donde n debe ser un número natural, es decir un entero positivo, existe una regla llamada *binomio de Newton.*

Se puede deducir la regla observando las características comunes que tienen los siguientes desarrollos:

$$x + y = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$
$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^5$$

a) El primer término es x^n.

b) El segundo término es $nx^{n-1}y$. De aquí en adelante no se puede continuar estableciendo una regla para cada término que sigue, pues si el binomio está elevado al cubo tiene cuatro términos mientras que si está a la séptima tendrá ocho, así que si se establece la regla para el quinto término el binomio al cubo no llega hasta allí. Siempre habría términos faltantes o sobrantes dependiendo de la potencia del binomio. Deben ponerse características generales, es decir, que todos los términos las tengan.

c) Al pasar de un término al siguiente, el exponente de x se reduce en uno mientras que el exponente de y aumenta en uno.

d) Cada desarrollo tiene $n + 1$ términos.

e) La suma de los exponentes en cada término de x y de y es n.

f) El último término es y^n.

g) El coeficiente de cada término se forma, a partir del término anterior, multiplicando el coeficiente por el exponente de x y dividiéndolo entre el número de términos que se llevan construidos. O bien, ${}_nC_{k-1}$, en donde k es el ordinal que ocupa el término a calcularse.

h) Los coeficientes son simétricos.

En el binomio anterior $(x + y)^n$, la literal x representa realmente al "primer término del binomio" mientras que la literal y significa "el segundo término del binomio".

Para desarrollar un binomio elevado a la potencia n deben hacerse cumplir las condiciones anteriores. El proceso completo consta fundamentalmente de dos pasos: uno, indicar el desarrollo y dos, el desarrollo ya efectuado. Es importante hacer notar que el inciso g) debe aplicarse cuando está indicado apenas el desarrollo, no cuando ya se desarrolló cada término. Para mayor claridad, ver el ejemplo 1. Además, el resultado final debe escribirse de manera que cada término esté ordenado, es decir, que las literales aparezcan en orden alfabético.

Ejemplo 1: $\left(2a+b\right)^5$

Solución: En este caso, $x = 2a$; $y = b$.

a) El primer término es $x^n = \left(2a\right)^5$.

b) El segundo término es $nx^{n-1}y = 5\left(2a\right)^4\left(b\right)$

c) El coeficiente del tercer término se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior (5) por el exponente de (2a) que es 4 y eso entre el número de términos que van, es decir entre 2:

$$\frac{5\times 4}{2} = 10$$

así que el tercer término es $10\left(2a\right)^3\left(b\right)^2$, o bien ${}_5C_{3-1} = {}_5C_2 = 10$

y así sucesivamente. De manera que el desarrollo del binomio es

$$\left(2a\right)^5 + 5\left(2a\right)^4\left(b\right) + \underbrace{\frac{5\times 4}{2}}_{10}\left(2a\right)^3\left(b\right)^2 + \underbrace{\frac{10\times 3}{3}}_{10}\left(2a\right)^2\left(b\right)^3 + \frac{10\times 2}{4}\left(2a\right)\left(b\right)^4 + \left(b\right)^5$$

$$= \left(2a\right)^5 + 5\left(2a\right)^4\left(b\right) + 10\left(2a\right)^3\left(b\right)^2 + 10\left(2a\right)^2\left(b\right)^3 + 5\left(2a\right)\left(b\right)^4 + \left(b\right)^5 \quad \text{(indicado)}$$

$$= 32a^5 + 5\left(16a^4\right)\left(b\right) + 10\left(8a^3\right)\left(b^2\right) + 10\left(4a^2\right)\left(b^3\right) + 5\left(2a\right)\left(b^4\right) + b^5$$

$$= 32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5 \quad \text{(desarrollado)}$$

NOTA: El desarrollo del binomio es $\mathbf{32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5}$. Es incorrecto dejarlo indicado como $\mathbf{(2a)^5 + 5(2a)^4(b) + 10(2a)^3(b)^2 + 10(2a)^2(b)^3 + 5(2a)(b)^4 + b^5}$ porque así solamente está indicado el desarrollo, pero no está desarrollado. Es el equivalente a decirle al lector “tú haz las cuentas”.

Ejemplo 2: $\left(2b^2 - 3a\right)^4$

Solución: $\left(2b^2\right)^4 + 4\left(2b^2\right)^3\left(-3a\right) + 6\left(2b^2\right)^2\left(-3a\right)^2 + 4\left(2b^2\right)\left(-3a\right)^3 + \left(-3a\right)^4$ (indicado)

$= 16b^8 + 4\left(8b^6\right)\left(-3a\right) + 6\left(4b^4\right)\left(9a^2\right) + 4\left(2b^2\right)\left(-27a^3\right) + \left(81a^4\right)$

$= 16b^8 - 96ab^6 + 216a^2b^4 - 216a^3b^2 + 81a^4$ (desarrollado)

Ejemplo 3: $\left(3b^2c - 2a^4\right)^6$

Solución: $\left(3b^2c\right)^6 + 6\left(3b^2c\right)^5\left(-2a^4\right) + 15\left(3b^2c\right)^4\left(-2a^4\right)^2 + 20\left(3b^2c\right)^3\left(-2a^4\right)^3 +$

$+ 15\left(3b^2c\right)^2\left(-2a^4\right)^4 + 6\left(3b^2c\right)\left(-2a^4\right)^5 + \left(-2a^4\right)^6$

$= 729b^{12}c^6 - 2916a^4b^{10}c^5 + 4860a^8b^8c^4 - 4320a^{12}b^6c^3 + 2160a^{16}b^4c^2 - 576a^{20}b^2c + 64a^{24}$

EJERCICIO 7

Desarrollar los siguientes binomios

1) $(3b^3 + a)^6$
2) $(2ab^2 - x^2)^5$
3) $(b^3c + 4a^2)^6$
4) $(2b^2y - x^3)^4$
5) $(3bc^2 + 4a^5)^4$
6) $(ab^4 - 4x^2)^5$
7) $(b^3c^2 + 4)^5$
8) $(2 - bx^3y)^4$
9) $(a^2b^3x^2 - 2c)^7$
10) $(3 - b^6xy)^5$

10.2 TERMINO K-ÉSIMO [2]

Hay ocasiones en que es necesario conocer solamente un término específico del desarrollo del binomio $\left(x+y\right)^n$. En casos así resulta más útil saber alguna forma de deducirlo sin necesidad de desarrollar todo el binomio.

A partir de los incisos de la página 68 se pueden deducir las características del término k-ésimo en donde haría falta analizar más profundamente los coeficientes de cada término para obtener el que específicamente se desee.

Para el término k-ésimo se tienen las siguientes características:

a) El exponente de y es k -1 ;
b) el exponente de x es la diferencia a n, ya que la suma de los exponentes de x y de y debe ser n. Dicho exponente es $n - (k - 1) = n - k + 1$;

Para hacer las deducciones correspondientes a cada coeficiente es necesario tener presentes las siguientes correspondencias factoriales:

* A la expresión $n(n - 1)$, para ser $n!$ le hacen falta los factores desde $(n - 2)$ hasta 1, que no es otra cosa que $(n - 2)!$. De manera que multiplicando por $(n - 2)!$ numerador y denominador para que no se altere se tiene que

$$n\left(n-1\right)=\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)!}{\left(n-2\right)!}=\frac{n!}{\left(n-2\right)!}$$

* A la expresión $n(n - 1)(n - 2)$, para ser el factorial $n!$ le faltan los factores desde $(n - 3)$ hasta 1, que no es otra cosa que $(n - 3)!$. De manera que multiplicando numerador y denominador por $(n - 3)!$ para que no se altere se tiene que

[2] En el idioma Español, los números ordinales se denotan en general con el sufijo **ésimo** , como en vigésimo. Cuando el número en cuestión, por tratarse de un asunto genérico, se nombra con la letra ***n*** , su ordinal toma el nombre de enésimo, derivado de la letra **ene** y el sufijo **ésimo.** Si en vez de ***n*** se utiliza la ***k*** , su ordinal es **kaésimo** , escrito k-ésimo.

Es oportuno comentar, como una cuestión cultural, que los ordinales son mal empleados por la mayoría de la gente, incluídos los que trabajan en los medios informativos y los oradores, a pesar de que deberían ser los que mejor manejaran el idioma por ser su herramienta de trabajo. Suelen decir cosas como *Estamos celebrando el cincuenta y cuatroavo aniversario de la muerte de*.... En el idioma Español el sufijo **avo** se emplea para denotar una fracción o quebrado, como un treceavo. Así que afirmar lo anterior es suponer que apenas se está celebrando una pequeña fracción del año. Lo correcto es utilizar los ordinales con su terminación **ésimo** , salvo sus excepciones (del uno al nueve). Debe decirse *estamos celebrando el quincuagésimo cuarto aniversario de la muerte de*.... El ordinal de 146 es centésimo cuadragésimo sexto. El ordinal de 281 es bicentésimo octogésimo primero. El ordinal de 396 es tricentésimo nonagésimo sexto. El ordinal de 435 es cuadringentésimo trigésimo quinto. A partir del 400 la *c* cambia a *g*.

$$n(n-1)(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-3)!}$$

Etc.

Sea el binomio $(x + y)^n$, cuyo desarrollo es

a) primer término: x^n ;
b) segundo término: $nx^{n-1}y$;
c) el tercer término es

$$\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2}y^2$$

d) el cuarto término es

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}x^{n-3}y^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}x^{n-3}y^3$$

e) el quinto término es

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times 3\times 4}x^{n-4}y^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!}x^{n-4}y^4$$

Y así sucesivamente. De manera que el desarrollo del binomio es a partir del tercer término en adelante es:

$$\underbrace{\frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2}y^2}_{k=3} + \underbrace{\frac{n!}{3!(n-3)!}x^{n-3}y^3}_{k=4} + \underbrace{\frac{n!}{4!(n-4)!}x^{n-4}y^4}_{k=5} + \ldots$$

finalmente se tiene que el término k-ésimo es

$$\boxed{{}_nC_{k-1}\,x^{n-k+1}y^{k-1}}$$

Ejemplo 1: Obtener el 4º término del desarrollo $(2b^3 - a)^9$

Solución: En este caso se tiene que $n = 9$ y $k = 4$. Así que el 4º término es

$$
\begin{aligned}
{}_nC_{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1} &= {}_9C_{4-1}\left(2b^3\right)^{9-4+1}\left(-a\right)^{4-1} \\
&= {}_9C_3\left(2b^3\right)^6\left(-a\right)^3 \\
&= -5376a^3b^{18}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2: Obtener el 3^{er} término del desarrollo $(3 - 2ax^5)^{10}$

Solución: En este caso se tiene que $n = 10$ y $k = 3$. Así que el 3^{er} término es

$$
\begin{aligned}
{}_nC_{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1} &= {}_{10}C_2\left(3\right)^8\left(-2ax^5\right)^2 \\
&= 1\ 180\,980a^2x^{10}
\end{aligned}
$$

10.3 TRIANGULO DE PASCAL

Más que algo útil, el llamado *triángulo de Pascal* es un jueguito de números interesante en el que cada renglón contiene a los coeficientes correspondientes de las diferentes potencias del desarrollo del binomio de Newton.

Dicho triángulo se construye bajo las siguientes reglas:

1) Todos los renglones comienzan y terminan con el número 1.
2) Todos los números de cada renglón deben estar localizados exactamente abajo del espacio formado por dos números del renglón anterior.
3) La suma de cada dos números consecutivos en cada renglón es el número que se coloca en el renglón siguiente y en el espacio formado por esos dos números sumados.
4) Cada nuevo renglón debe contener un número más que el renglón anterior.

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & \text{coeficientes de } (x+y)^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \text{coeficientes de } (x+y)^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \text{coeficientes de } (x+y)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \text{coeficientes de } (x+y)^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \text{coeficientes de } (x+y)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \text{coeficientes de } (x+y)^5
\end{array}
$$

No es exagerado afirmar que solamente es un jueguito de números el triángulo de Pascal porque no resulta nada práctico, ya que deben estar construidos todos los renglones anteriores para poder deducir el siguiente. Así, si se desean conocer, por ejemplo, los coeficientes del desarrollo de $(x + y)^{18}$ deben construirse todos los renglones anteriores para lograrlo.

10.4 EXPONENTES FRACCIONARIOS O NEGATIVOS

El binomio de Newton $\left(x + y\right)^n$ solamente funciona para un número n natural, es decir un entero positivo. Si n es un número negativo o fraccionario, por las reglas del desarrollo del binomio vistas anteriormente no tendría fin.

Cuando n no es un número natural el binomio de Newton es utilizado como un recurso para obtener resultados con cierta aproximación; dicha aproximación dependerá del número de términos que se empleen. Actualmente con el uso de las calculadoras resulta totalmente impráctico.

Ejemplo: Obtener el valor aproximado de $\sqrt{5}$.

Solución: El valor real de $\sqrt{5}$ es 2.236067978. Se considera que $\sqrt{5} = \left(4+1\right)^{1/2}$. Entonces en la siguiente tabla puede observarse que mientras más términos se empleen, más cerca del valor real se está:

			DIFERENCIA CON EL VALOR REAL EN VALOR ABSOLUTO
1	$4^{1/2} =$	2	0.236067978
2	$4^{1/2} + \frac{1}{2}\left(4\right)^{-1/2}\left(1\right) =$	2.25	0.013932023
3	$4^{1/2} + \frac{1}{2}\left(4\right)^{-1/2}\left(1\right) - \frac{1}{8}\left(4\right)^{-3/2}\left(1\right)^2 =$	2.234375	0.001692977
4	$4^{1/2} + \frac{1}{2}\left(4\right)^{-1/2}\left(1\right) - \frac{1}{8}\left(4\right)^{-3/2}\left(1\right)^2 + \frac{1}{16}\left(4\right)^{-5/2}\left(1\right)^3 =$	2.236328125	0.000260148

EJERCICIO 8

1) Encontrar el 4º término del desarrollo del binomio $(2b^4 + a)^7$
2) Encontrar el 3^er término del desarrollo del binomio $(ab^2 - 2x^2)^5$
3) Encontrar el 4º término del desarrollo del binomio $(b^2c + 3a^3)^{10}$
4) Encontrar el 6º término del desarrollo del binomio $(2b^2y - x^2)^{12}$
5) Encontrar el 5º término del desarrollo del binomio $(3bc^2 + 2a^2)^{11}$
6) Encontrar el 4º término del desarrollo del binomio $(2ab^4 - 4x^5)^5$
7) Encontrar el 4º término del desarrollo del binomio $(b^3c^2 + 4)^8$
8) Encontrar el 4º término del desarrollo del binomio $(2y - bx^2)^9$
9) Encontrar el 3^er término del desarrollo del binomio $(a^2b^3x^2 - 2c)^7$
10) Encontrar el 3^er término del desarrollo del binomio $(3 - b^6xy)^6$