9 LOGARITMOS

ÍNDICE PARTICULAR

9.1) CONCEPTOS Y DEFINICIONES **148**
9.2) PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS **151**
9.3) OBTENCIÓN DE VALORES **152**
9.4) ECUACIONES EXPONENCIALES **152**
ejercicio 9.1 **156**

9

LOGARITMOS

9.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Una función exponencial es aquella en la que la variable está en el exponente. Ejemplos de funciones exponenciales son

$$y = 2^x$$
$$y = 4^{5x}$$
$$y = 8^{2x+1}$$
$$y = 10^{x-3}$$

En Matemáticas toda operación o todo proceso tiene su inverso, es decir un camino de retorno al punto inicial. Por ejemplo, si a 4 se le suma 3 se obtiene 7, el retorno es restar 3 a 7. Si 30 se multiplica por 2 se obtiene 60, el retorno es a 60 dividirlo entre 2. Si a 35 se le saca *coseno* se obtiene 0.819152044 , el retorno al 35 inicial se consigue sacando *arco coseno* a 0.819152044. Obsérvese que la operación de retorno siempre se aplica al resultado obtenido en la operación inicial.

De manera que si se tienen las siguientes potencias:

1) $2^3 = 8$
2) $3^2 = 9$
3) $5^4 = 625$
4) $10^2 = 100$
5) $10^3 = 1000$ etc.

y se pregunta ¿Cuál es el inverso (el camino de retorno) de cada una de ellas? por inercia el estudiante responde conforme a la siguiente tabla:

POTENCIA	INVERSO
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$5^4 = 625$	$\sqrt[4]{625} = 5$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

lo cual es cierto. Sin embargo, obsérvese que en cada potencia se tienen dos cantidades, la base y el exponente y en la tabla anterior el retorno se hizo hacia la base. ¿No podría haber sido el retorno hacia el exponente? Dicho de otra forma: ¿Cómo hacer para regresar al exponente, en vez de a la base? Allí es donde aparece el concepto de logaritmo.

Cuando se tiene la potenciación

$$a^k = c$$

donde a , k y c son cualquier número (son tres cantidades las que intervienen: la base, el exponente y el resultado), a partir del resultado c existen dos posibilidades de regreso, uno hacia la base y otro hacia el exponente. Para regresar a la base se emplea la raíz *k-ésima*[2] de c ;

$$\sqrt[k]{c} = a$$

[2] En el idioma Español, los números ordinales se denotan en general con el sufijo *ésimo* , como en vig*ésimo*. Cuando el número en cuestión, por tratarse de un asunto genérico, se nombra con la letra *n* , su ordinal toma el nombre de *enésimo*, derivado de la letra *ene* y el sufijo *ésimo*. Si en vez de *n* se utiliza la letra *k* , su ordinal es *kaésimo* , escrito *k-ésimo*.

Es oportuno comentar, como una cuestión cultural, que los ordinales son mal empleados por la mayoría de la gente, incluídos los que trabajan en los medios informativos y los oradores, a pesar de que deberían ser los que mejor manejaran el idioma por ser su herramienta de trabajo. Suelen decir cosas como *"estamos celebrando el cincuenta y cuatro avo aniversario de la muerte de..."*. En el idioma Español el sufijo *avo* se emplea para denotar una fracción o quebrado, como *un treceavo*. Así que afirmar lo anterior es suponer que apenas se está celebrando una pequeña fracción del año. Lo correcto es utilizar los ordinales con su terminación *ésimo* , salvo sus excepciones (del uno al nueve). Debe decirse "*estamos celebrando el quincuagésimo cuarto aniversario de la muerte de..."*.

El ordinal de 146 es *centésimo cuadragésimo sexto*. El ordinal de 281 es *bicentésimo octogésimo primero*. El ordinal de 396 es *tricentésimo nonagésimo sexto*. El ordinal de 435 es *cuadringentésimo trigésimo quinto*. A partir del 400 la c cambia a g. Se recomienda al estudiante consultar en el diccionario de la Real Academia Española palabras como *cuadringentésimo*.

mientras que para regresar al exponente se emplea el logaritmo base a de c. Esto es:

$$log_a c = k$$

Obsérvese que en ambos casos la “operación raíz” o la “operación logaritmo” se le aplicó al resultado c de la potenciación; además, se debe hacer intervenir a la tercera cantidad, en el primer caso para señalar el índice del radical, en el segundo caso para señalar la base.

Volviendo al ejemplo de la tabla anterior, existen dos caminos de retorno, uno hacia la base y otro hacia el exponente. Cuando es a la base, se emplea la raíz *k-ésima* , cuando es al exponente se emplea el logaritmo base a:

POTENCIA	REGRESO A LA BASE	REGRESO AL EXPONENTE
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$log_2 8 = 3$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$log_3 9 = 2$
$5^4 = 625$	$\sqrt[4]{625} = 5$	$log_5 625 = 4$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$log_{10} 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$log_{10} 1000 = 3$

De manera que la definición de logaritmo es:

El logaritmo de un número n es el exponente al que debe elevarse la base para obtener dicho número n .

Como los logaritmos pueden ser base cualquier número, habría un número infinito de diferentes logaritmos, por lo que en algún momento los matemáticos acordaron emplear solamente dos tipos de logaritmos:

a) los logaritmos base diez (por tratarse de un sistema decimal), llamados *logaritmos vulgares* o *logaritmos decimales,* representados simplemente por el símbolo *log* sin especificar la base, que se sobrentiende que es 10.

b) los *logaritmos naturales,* llamados también *logaritmos neperianos*, cuya base es el número irracional 2.718281828 , representados por el símbolo *ln* . La base se simboliza con la letra e , o sea que $e = 2.718281828$. Este número sale del límite

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

del cual, por no ser tema de este curso, no se va a detallar más.

9.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Los logaritmos, no importa cuál sea su base, todos tienen las siguientes tres propiedades:

1ª) $\log A + \log B = \log AB$

2ª) $\log A - \log B = \log \dfrac{A}{B}$

3ª) $A \log B = \log B^A$

Son propiedades relativamente fáciles de comprender, considerando que los logaritmos son exponentes. Si por ejemplo se multiplica x^4 por x^6 se obtiene

$$(x^4)(x^6) = x^{4+6} = x^{10}$$

donde la parte fundamental para entender la primera propiedad de los logaritmos radica en ver que cuando se multiplican dos cantidades con la misma base, se suman sus exponentes. Por ejemplo, si se tienen las cantidades $100 = 10^2$ y que sea $1000 = 10^3$, ambas con la misma base 10, según la primera propiedad se tendría que

$$\log 100 + \log 1000 = \log \left[(100)(1000) \right]$$

Pero como *log* 100 = 2, porque es el exponente al que debe elevarse la base 10 para que resulte el 100, y además *log* 1000 = 3, porque es el exponente al que debe elevarse la base 10 para que resulte el 1000, la igualdad anterior se puede escribir como

$$2 + 3 = \log \left[(100)(1000) \right]$$

$$2 + 3 = \log \left[(10^2)(10^3) \right]$$

$$2 + 3 = \log \left[(10)^{2+3} \right]$$

y este resultado no es más que la misma definición de logaritmo, leída de derecha a izquierda: El logaritmo es el exponente al que debe elevarse la base y dicho exponente de la base 10 es 2 + 3 que es lo que está señalado en el lado izquierdo de la igualdad.

9.3 OBTENCIÓN DE VALORES

Si se analiza con atención la siguiente tabla (base 10)

FORMA EXPONENCIAL	FORMA LOGARÍTMICA
$10^1 = 10$	$log\ 10 = 1$
$10^2 = 100$	$log\ 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$log\ 1000 = 3$
$10^4 = 10\,000$	$log\ 10\,000 = 4$

se puede deducir fácilmente que el logaritmo de un número comprendido entre 10 y 100 debe estar entre 1 y 2, o sea que debe ser uno punto y fracción. Con la calculadora, el alumno debe comprobarlo sacando el logaritmo de 23, el logaritmo de 40, el logaritmo de 89, etc.

De la misma forma, el logaritmo de un número comprendido entre 100 y 1000 debe estar entre 2 y 3, o sea que debe ser dos punto y fracción. Con la calculadora, el alumno debe comprobarlo sacando el logaritmo de 133, el logaritmo de 400, el logaritmo de 902, etc.

Finalmente, el logaritmo de un número comprendido entre 1000 y 10 000 debe estar entre 3 y 4, o sea que debe ser tres punto y fracción. Con la calculadora, el alumno debe comprobarlo sacando el logaritmo de 1303, el logaritmo de 4609, el logaritmo de 8902, etc.

9.4 ECUACIONES EXPONENCIALES

Una de las aplicaciones más importantes de los logaritmos es la resolución de ecuaciones exponenciales, o sea aquéllas en la que la incógnita está en el exponente. Por ejemplo:

$$5.2^x = 28$$

que significa ¿a qué exponente debe elevarse 5.2 para obtener 28? Otros ejemplos son:

$$14^{3x} = 50.2$$

$$3.04^{x-5} = 100$$

El procedimiento para resolver estas ecuaciones, en vez de hacerlo a través de una regla redactada, se hará por medio de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $3^{x} = 15$

Solución: La ecuación anterior significa: ¿A qué exponente debe elevarse el 3 para obtener 15? Nótese que $3^2 = 9$ mientras que $3^3 = 27$ (ya se pasó), por lo que el resultado deberá estar entre 2 y 3, es decir, debe ser dos punto y fracción.

Por la ley uniforme o la ley de las igualdades que establece que *lo que se haga de un lado de la igualdad debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve*, se aplican logaritmos en ambos lados de la igualdad (no importa si son logaritmos base 10 o logaritmos naturales):

$$\log 3^{x} = \log 15$$

Aplicando ahora la 3ª propiedad de los logaritmos en el lado izquierdo, se obtiene

$$x \log 3 = \log 15$$

y despejando *x:*

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

El logaritmo de 15 y el logaritmo de 3 debe el estudiante buscarlo en la calculadora y realizar las operaciones con ella. Se llega a

$$\boxed{x = 2.464973}$$

NOTA: El alumno debe comprobar con su calculadora que no importa el tipo de logaritmo que se aplique a la ecuación, siempre se llegará al mismo resultado, es decir, da lo mismo si se aplican logaritmos base 10 (*log*) o logaritmos naturales (*ln*).

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $4^{3x} = 105$

Solución: Por la ley uniforme o la ley de las igualdades que establece que *lo que se haga de un lado de la igualdad debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve*, se aplican logaritmos en ambos lados de la igualdad (no importa si son logaritmos base 10 o logaritmos naturales):

$$\log 4^{3x} = \log 105$$

Aplicando ahora la 3ª propiedad de los logaritmos en el lado izquierdo, se obtiene

$$3x \log 4 = \log 105$$

de donde

$$3x = \frac{\log 105}{\log 4}$$

Haciendo con la calculadora el cociente del lado derecho:

$$3x = 3.357122$$

$$x = \frac{3.357122}{3}$$

$$\boxed{x = 1.11904}$$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación exponencial $6^{2x-1} = 70$

Solución: Por la ley uniforme o la ley de las igualdades que establece que *lo que se haga de un lado de la igualdad debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve*, se aplican logaritmos en ambos lados de la igualdad (no importa si son logaritmos base 10 o logaritmos naturales):

$$\log 6^{2x-1} = \log 70$$

Aplicando ahora la 3ª propiedad de los logaritmos en el lado izquierdo, se obtiene

$$(2x-1)\log 6 = \log 70$$

de donde

$$2x - 1 = \frac{\log 70}{\log 6}$$

$$2x - 1 = 2.37113$$
$$2x = 2.37113 + 1$$
$$2x = 3.37113$$

$$x = \frac{3.37113}{2}$$

$$\boxed{x = 1.685565}$$

Ejemplo 4: Resolver la ecuación exponencial $\frac{5^{2x}}{7} = 20.6$

Solución: Multiplicando toda la igualdad por 7 (recordar que es falso que el 7 "pasa" a multiplicar al otro lado):

$$5^{2x} = (20.6)(7)$$
$$5^{2x} = 144.2$$

Por la ley uniforme o la ley de las igualdades que establece que *lo que se haga de un lado de la igualdad debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve*, se aplican logaritmos en ambos lados de la igualdad (no importa si son logaritmos base 10 o logaritmos naturales):

$$\log 5^{2x} = \log 144.2$$

Aplicando ahora la 3ª propiedad de los logaritmos en el lado izquierdo, se obtiene

$$2x \log 5 = \log 144.2$$

$$2x = \frac{\log 144.2}{\log 5}$$

$$2x = 3.08878$$

$$x = \frac{3.08878}{2}$$

$$\boxed{x = 1.54439}$$

EJERCICIO 9.1

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $22^x = 12$

2) $19^x = 55$

3) $34^x = 2$

4) $17^{4x} = 40$

5) $201^{2x} = 100$

6) $13.5^{5x} = 13.5$

7) $28.89^{7x} = 1$

8) $100^x = 10$

9) $7^x = 49$

10) $40.4^{x+2} = 77.3$

11) $200^{x-5} = 100$

12) $77.9^{3x-7} = 45$

13) $307^{4x+9} = 52$

14) $5.09^{7x-6} = 200.3$

15) $99^{11x-10} = 62.2$

16) $(4.65)(3^{2x}) = 88$

17) $23 + 2^{3x-1} = 88.09$

18) $\dfrac{50.9^{4x+9}}{2.8} = 300.9$

19) $5 + \dfrac{5.9^{9x-11}}{1.98} = 109.87$

20) $9.6 - \dfrac{0.8^{6x-13}}{17.9} = 0.997$