CAPÍTULO 9

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

9.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Como en este momento del curso el estudiante ya debe estar bastante familiarizado con el uso de las fórmulas de derivación, en este capítulo se darán las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas acompañadas de unos cuantos ejemplos.

Algunas características de las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas, así como de su escritura, son:

a) Todas son una fracción cuyo numerador es la derivada del argumento.

b) Las cofunciones son iguales, diferenciadas solamente de un signo negativo, es decir, la fórmula del *arco seno* es igual a la del *arco coseno*, solamente que ésta última es negativa; la fórmula de la *arco tangente* es igual a la de la *arco cotangente*, siendo ésta última negativa. Y algo semejante sucede con la *arco secante* y la *arco cosecante*.

c) El símbolo de una función trigonométrica inversa, por ejemplo del *seno inverso*, debe ser *arc sen*, que se lee "*arco seno*" y significa "*seno cuyo arco es*", es decir, "seno cuyo ángulo es", ya que el arco en una circunferencia es igual al ángulo central que abarca. En matemáticas el símbolo universal para denotar un inverso es un exponente a la menos uno, por ejemplo, A^{-1} significa el inverso de A.

Sin embargo, en virtud de que las reglas de escritura matemática recomiendan, para evitar confusiones, no emplear el mismo símbolo que pueda tener dos significados diferentes, resulta incorrecto escribir $sen^{-1} u$ en vez de $arc\ sen\ u$, ya que la primera simbología podría tener dos significados que confundirían al lector, una como el *seno inverso*, la otra como

$$sen^{-1} u = \frac{1}{sen^{1} u} = \frac{1}{sen\, u} = csc\, u$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.luiscastrop.com

9.2 FÓRMULAS

(17) $$\frac{d}{dx} arc\ sen\ u = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

(18) $$\frac{d}{dx} arc\ cos\ u = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

(19) $$\frac{d}{dx} arc\ tan\ u = \frac{\frac{du}{dx}}{u^2+1}$$

(20) $$\frac{d}{dx} arc\ cot\ u = -\frac{\frac{du}{dx}}{u^2+1}$$

(21) $$\frac{d}{dx} arc\ sec\, u = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

(22) $$\frac{d}{dx} arc\ csc\, u = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.luiscastrop.com

Ejemplo 1: Derivar $y = arc\ sen\left(x^3 - x\right)$

Solución: El argumento es $u = x^3 - x$, de manera que por la fórmula (17):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(x^3 - x\right)}{\sqrt{1-\left(x^3-x\right)^2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{1-\left(x^3-x\right)^2}}}$$

Ejemplo 2: Calcular la derivada de $y = arc\ tan\sqrt{x}$

Solución: El argumento es $u = \sqrt{x}$, por lo que conforme a la fórmula (19) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x+1}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}}$$

Ejemplo 3: Calcular la derivada de $y = arc\,sec\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución: El argumento es $u=\frac{1}{x}=x^{-1}$, por lo que conforme a la fórmula (21) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{d}{dx}x^{-1}}{x^{-1}\sqrt{\left(x^{-1}\right)^2-1}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1x^{-2}}{x^{-1}\sqrt{x^{-2}-1}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}}$$

Aplicando la ley de la herradura en las dos fracciones que aparecen afuera del radical y sacando común denominador adentro del radical:

LUIS CASTRO PÉREZ www.luiscastrop.com

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{x^2\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

EJERCICIO 9.1

Calcular la derivada de las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) $y = arc\ sen\ \dfrac{4}{5x}$

2) $y = arc\ cos\left(3-8x\right)$

3) $y = arc\ tan\left(5-x^7\right)$

4) $y = arc\ cot\left(\dfrac{2}{3x-1}\right)$

5) $y = arc\ sec\ e^{2x}$

6) $y = arc\ csc\left(4x-1\right)^8$

7) $y = arc\ sen\ \sqrt[5]{3x-11}$

8) $y = arc\ cos\ \sqrt[4]{\left(1-x^3\right)^7}$

9) $y = arc\ tan\left(3x^2-11x+5\right)$

10) $y = arc\ cot\left(5x^7-x\right)$

11) $y = arc\ sec\left(5x^3-x\right)$

12) $y = arc\ csc\left(-6-x\right)$

13) $y = arc\ sen\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

14) $y = arc\ cos\left(\dfrac{2}{x}\right)^7$

15) $y = arc\ tan\left(\dfrac{x^6}{7}\right)^2$

16) $y = arc\ cot\left(\dfrac{3x-7}{5}\right)$

17) $y = arc\ sec\left(\dfrac{7x^2+8}{13}\right)$

18) $y = arc\ csc\left(\dfrac{8-7x}{9}\right)$

19) $y = arc\ sen^7\ 2x$

20) $y = arc\ cos^5\ 7x$

21) $y = arc\ tan^6\left(2x-19\right)$

22) $y = \sqrt{arc\ cot\ 6x}$

23) $y = \sqrt{arc\ sec\ 6x}$

24) $y = \sqrt{arc\ csc\ 7x^8}$

LUIS CASTRO PÉREZ www.luiscastrop.com