7 DIVISIÓN DE FRACCIONES

ÍNDICE PARTICULAR

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Si se divide una cuarta parte de un pastel a la mitad se obtiene una octava parte del mismo, lo que escrito en simbología matemática es

$$\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$$

Lo anterior es lo mismo que

$$\frac{1}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

De donde se obtiene la regla práctica de la división de fracciones consistente en invertir la segunda fracción al mismo tiempo que se invierte la operación, es decir, de división se pasa a multiplicación. En ese momento, al ser ya multiplicación, se aplica el procedimiento visto en el capítulo anterior.

Ejemplo 1: Dividir $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

Solución: Invirtiendo la segunda fracción se invierte también la operación, es decir de división se pasa a multiplicación, esto es

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

De aquí se obtuvo la conocida regla de la multiplicación en cruz:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 2: Dividir las fracciones $\frac{2}{a} \div \frac{5-b}{5+b}$

Solución: Invirtiendo la segunda fracción y con ello pasando de división a multiplicación:

$$\frac{2}{a} \div \frac{5-b}{5+b} = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{5+b}{5-b}\right)$$

$$= \frac{2(5+b)}{a(5-b)}$$

$$\frac{2}{a} \div \frac{5-b}{5+b} = \frac{10+2b}{5a-ab}$$

Ejemplo 3: Dividir las fracciones $\frac{b-4}{x-1} \div \frac{x+2}{b+4}$

Solución: Invirtiendo la segunda fracción, al mismo tiempo que se convierte en multiplicación, resulta:

$$\frac{b-4}{x-1} \div \frac{x+2}{b+4} = \left(\frac{b-4}{x-1}\right)\left(\frac{b+4}{x+2}\right)$$

$$= \frac{(b-4)(b+4)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{b-4}{x-1} \div \frac{x+2}{b+4} = \frac{b^2-16}{x^2+x-2}$$

Ejemplo 4: Dividir las fracciones $2a^3 \div \frac{a-b}{b+9}$

Solución: Invirtiendo la segunda fracción, al mismo tiempo que se convierte en multiplicación y poniéndole denominador 1 a $2a^3$, resulta:

$$2a^3 \div \frac{a-b}{b+9} = \left(\frac{2a^3}{1}\right)\left(\frac{b+9}{a-b}\right)$$

$$= \frac{2a^3(b+9)}{1(a-b)}$$

$$2a^3 \div \frac{a-b}{b+9} = \frac{2a^3b+18a^3}{a-b}$$

Ejemplo 5: Dividir $\dfrac{3x^2 - 5xy - 13}{a + 4} \div 10$

Solución: Invirtiendo la segunda fracción, al mismo tiempo que se convierte en multiplicación:

$$\frac{3x^2 - 5xy - 13}{a + 4} \div 10 = \left(\frac{3x^2 - 5xy - 13}{a + 4}\right)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{3x^2 - 5xy - 13}{a + 4} \div 10 = \frac{3x^2 - 5xy - 13}{10a + 40}$$

EJERCICIO 7.1

Dividir las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{a}{b^2} \div \dfrac{b^3}{3a}$

2) $\dfrac{2 - 7x}{3} \div \dfrac{3x + 11}{9}$

3) $\dfrac{4a - b}{11} \div \dfrac{11}{4a + b}$

4) $\dfrac{6ab - 5}{6 - 5ab} \div \dfrac{6 - 5ab}{19}$

5) $\dfrac{1}{4x^6 - y^7} \div \dfrac{2}{x^5 + 11y^{12}}$

6) $x^2 y \div \dfrac{3ax + 7by}{ab}$

7) $8bc \div \dfrac{1}{3x^2 + 5x + 13}$

8) $\dfrac{1}{3x - 10} \div 7b^4$

9) $\dfrac{2x + 7y^3}{2x - 7y^3} \div 2x^6$

10) $\dfrac{abc - 11}{bc - 11} \div 4bc$

FRACCIONES COMPLEJAS

La fracción $\frac{2}{5}$ tiene el significado de que hay dos partes de las cinco en que se dividió la unidad. Sin embargo, la línea de fracción también tiene el significado de división, o sea que $\frac{2}{5}$ quiere decir $2 \div 5$.

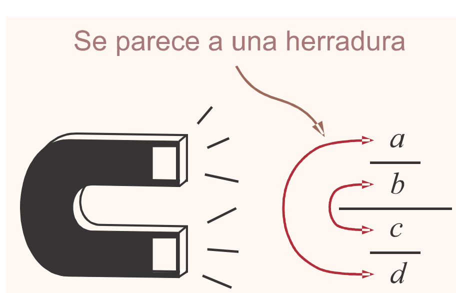
Visto a la inversa, la división $3 \div 7$ se puede escribir como $\frac{3}{7}$. De manera que si se divide $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, cuyo resultado es $\frac{ad}{bc}$, también se puede escribir como

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

que obviamente equivale a $\frac{ad}{bc}$, es decir que

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Tratando de descubrir alguna regla práctica para obtener el resultado de esta fracción compleja, surge la conocida *ley de la herradura*, llamada así por semejanza con la figura que se forma al multiplicar los extremos, por una parte, y los medios, por otra.



Debe quedar, por esta razón, bien claro que *la ley de la herradura* solamente puede emplearse cuando existe una sola fracción en el numerado y una sola fracción en el denominador. O lo que es exactamente lo mismo, únicamente cuando la operación principal es la multiplicación, tanto en el numerador como en el denominador, *no la suma*. De manera que para reducir una fracción compleja a una fracción simple, pueden seguirse dos caminos, es decir, se tienen dos opciones:

1ª OPCIÓN:

* **Hacer la suma de fracciones indicada en el numerador y/o en el denominador;**
* **Una vez reducido el numerador y el denominador a una sola fracción, aplicar la ley de la herradura.**

Ejemplo 1: Reducir $\dfrac{3a+\dfrac{a}{2b}}{2b+\dfrac{1}{3}}$

Solución: La operación principal del numerador es la suma, lo mismo que en el denominador, por lo tanto NO se puede utilizar la ley de la herradura.

operación principal del numerador

$$\frac{3a+\dfrac{a}{2b}}{2b+\dfrac{1}{3}}$$

operación principal del denominador

Realizando las sumas indicadas, tanto en el numerador como en el denominador, sacando en ambos casos su respectivo común denominador, se obtiene:

$$\frac{3a+\dfrac{a}{2b}}{2b+\dfrac{1}{3}}=\frac{\dfrac{2b\left(3a\right)+1\left(a\right)}{2b}}{\dfrac{3\left(2b\right)+1\left(1\right)}{3}}$$

$$=\frac{\dfrac{6ab+a}{2b}}{\dfrac{6b+1}{3}}$$

En este momento ya se tiene una sola fracción en el numerador y una sola fracción en el denominador, por lo que ya se puede aplicar correctamente la ley de la herradura:

$$\frac{3\left(6ab+a\right)}{2b\left(6b+1\right)}=\frac{18ab+3a}{12b^2+2b}$$

Para simplificar esta fracción hay que recordar que primero debe factorizarse:

$$\frac{18ab+3a}{12b^2+2b}=\frac{3a\cancel{\left(6b+1\right)}}{2b\cancel{\left(6b+1\right)}}$$

Así que finalmente:

$$\frac{3a+\dfrac{a}{2b}}{2b+\dfrac{1}{3}}=\frac{3a}{2b}$$

Es mera coincidencia que el resultado obtenido sean los primeros términos originales tanto del numerador como del denominador.

Ejemplo 2: Reducir $\dfrac{\dfrac{5x}{6y}-\dfrac{1}{3}}{y-\dfrac{2y^2}{5x}}$

Solución: En el numerador existen dos fracciones, lo mismo que en el denominador, por lo tanto no se puede utilizar la ley de la herradura. En otras palabras, la operación principal del numerador es una resta, lo mismo que en el denominador:

operación principal del numerador

$$\frac{\dfrac{5x}{6y} - \dfrac{1}{3}}{y - \dfrac{2y^2}{5x}}$$

operación principal del denominador

Realizando las restas indicadas, tanto en el numerador como en el denominador, sacando en ambos casos su respectivo común denominador (ver página 54), se obtiene:

$$\frac{\dfrac{5x}{6y} - \dfrac{1}{3}}{y - \dfrac{2y^2}{5x}} = \frac{\dfrac{1(5x) - 2y(1)}{6y}}{\dfrac{5x(y) - 1(2y^2)}{5x}}$$

$$= \frac{\dfrac{5x - 2y}{6y}}{\dfrac{5xy - 2y^2}{5x}}$$

En este momento ya se tiene una sola fracción en el numerador y una sola fracción en el denominador, por lo que ya se puede aplicar correctamente “la ley de la herradura”:

$$\frac{5x(5x - 2y)}{6y(5xy - 2y^2)} = \frac{25x^2 - 10xy}{30xy^2 - 12y^3}$$

Para simplificarla debe factorizarse:

$$\frac{25x^2 - 10xy}{30xy^2 - 12y^3} = \frac{5x\cancel{(5x - 2y)}}{6y^2\cancel{(5x - 2y)}}$$

por lo que finalmente se obtiene:

$$\frac{\dfrac{5x}{6y}-\dfrac{1}{3}}{y-\dfrac{2y^2}{5x}}=\frac{5x}{6y^2}$$

Otra opción válida para reducir las fracciones complejas a una fracción simple es:

2ª OPCIÓN:

* **Se multiplica el numerador y el denominador (propiedad de las fracciones) por el común denominador de todos los denominadores parciales que aparezcan; al realizar la multiplicación anterior desaparecen los denominadores parciales, quedando ya la fracción como fracción simple.**

* **Factorizar para simplificar.**

Ejemplo 1: Reducir $\dfrac{3a+\dfrac{a}{2b}}{2b+\dfrac{1}{3}}$

Solución: El común denominador de los denominadores parciales (del $2b$ y del 3) es $6b$. Así que multiplicando todo el numerador y todo el denominador por $6b$, resulta

$$\frac{6b\left(3a+\dfrac{a}{2b}\right)}{6b\left(2b+\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{18ab+3a}{12b^2+2b}$$

$$=\frac{3a\cancel{(6b+1)}}{2b\cancel{(6b+1)}}$$

Que es el mismo resultado obtenido por la otra opción en el ejemplo 1, página 86.

Ejemplo 2: Reducir $\dfrac{\dfrac{5x}{6y}-\dfrac{1}{3}}{y-\dfrac{2y^2}{5x}}$

Solución: El común denominador de los denominadores parciales (del $6y$, del 3 y del $5x$) es $30xy$. Así que multiplicando todo el numerador y todo el denominador por $30xy$ resulta

$$\frac{30xy\left(\dfrac{5x}{6y}-\dfrac{1}{3}\right)}{30xy\left(y-\dfrac{2y^2}{5x}\right)}=\frac{25x^2-10xy}{30xy^2-12y^3}$$

$$=\frac{5x\cancel{(5x-2y)}}{6y^2\cancel{(5x-2y)}}$$

Que es el mismo resultado obtenido por la otra opción en el ejemplo 2, página 87.

Ejemplo 3: Reducir $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}$

Solución: El común denominador de los cuatro denominadores parciales es ab. Entonces multiplicando la fracción compleja original por este común denominador:

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{ab\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)}{ab\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{\cancel{a}b}{\cancel{a}}+\dfrac{a\cancel{b}}{\cancel{b}}}{\dfrac{a\cancel{b}}{\cancel{b}}-\dfrac{\cancel{a}b}{\cancel{a}}}$$

$$= \frac{b + a}{a - b}$$

que es lo mismo que

$$= \frac{a + b}{a - b}$$

es decir que

$$\boxed{\frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}} = \frac{a + b}{a - b}}$$

EJERCICIO 7.2

Reducir las siguientes fracciones complejas por cualquiera de los dos métodos explicados:

1) $$\frac{\frac{a}{b}-\frac{a}{2}}{2-b}$$

2) $$\frac{\frac{18a^2}{b}+\frac{21a}{2}}{24b+\frac{14b^2}{a}}$$

3) $$\frac{4ab^2-\frac{bx}{5}}{\frac{5a^3}{x}-\frac{a^2}{4b}}$$

4) $$\frac{\frac{8a^2}{y}+\frac{5a^3b}{3y}}{\frac{6b^2y}{x^2}+\frac{5ab^3y}{4x^2}}$$

5) $$\frac{\frac{3a}{5}+\frac{1}{6}}{2c+\frac{5c}{9a}}$$

6) $$\frac{\frac{5a^2}{3b}-\frac{10a}{3b}}{\frac{5a^2}{b}-\frac{10a}{b}}$$

7) $$\frac{\frac{5}{2b}+\frac{1}{2}}{\frac{5a}{a-1}+\frac{ab}{a-1}}$$

8) $$\frac{\frac{3}{2}+\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}+\frac{2}{3}}$$

9) $$\frac{\frac{5}{2}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{2}{5}}$$

10) $$\frac{\frac{12}{b^2}-\frac{5}{b}}{\frac{12a}{ab^2}-\frac{5b}{b^2}}$$