

# 7 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

## ÍNDICE PARTICULAR

- 7.1) CONCEPTOS Y DEFINICIONES **120**  
7.2) LEY DE LOS SENOS **120**  
7.3) LEY DE LOS COSENOS **125**  
    *ejercicio 7.1* **136**

## 7

## RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

### 7.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Todos los triángulos constan de seis elementos primarios que son tres ángulos y tres lados. Resolver un triángulo significa encontrar algunos o todos los elementos del triángulo a partir de tres de ellos conocidos, siempre y cuando esos tres no sean los tres ángulos. Esto significa que los tres elementos conocidos pueden ser

- ▣ los tres lados,
- ▣ dos lados y un ángulo,
- ▣ un lado y dos ángulos.

Las definiciones de las funciones trigonométricas tienen su origen en triángulos rectángulos, tal y como se manejó en el párrafo 1.2 de la página 40, esto es que el *seno* es el cateto opuesto entre la hipotenusa, el *coseno* es el cateto adyacente entre la hipotenusa, la *tangente* es el cateto opuesto entre el cateto adyacente, etc. Podría decirse que inicialmente con ellas se podían resolver solamente triángulos rectángulos. Sin embargo, no solamente los triángulos rectángulos pueden resolverse con dichas funciones, aunque su origen esté allí, sino también los que no son rectángulos.

Existen dos leyes muy importantes de la trigonometría con las cuales puede resolverse todo tipo de triángulos. Son *la ley de los senos* y *la ley de los cosenos*.

### 7.2 LEY DE LOS SENOS

La ley de los senos es aplicable a cualquier triángulo si dentro de los tres elementos conocidos se tiene “el par” **un lado y su ángulo opuesto conocidos**, pudiendo ser el tercer elemento conocido otro lado o bien otro ángulo.

La utilización de la ley de los senos, por ser más simple y menos laboriosa, se prefiere sobre la ley de los cosenos. Con ella se puede calcular algún lado o algún ángulo desconocido.

La ley de los senos dice que:

### En todo triángulo se cumple que

*Un lado cualquiera entre el seno de su ángulo opuesto es igual a otro lado cualquiera entre el seno de su ángulo opuesto.*

Respecto de la figura 7.1, en cualquiera de los dos triángulos, conforme a la ley anterior, se cumple que

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{d}{\text{sen } \delta}$$

Al aplicar esta ley solamente se toma un signo igual y la fracción que se escribe en el lado izquierdo debe ser la del lado conocido entre el seno de su ángulo opuesto conocido, que en los ejemplos siguientes se les llamará “par conocido”, y en el lado derecho del signo igual debe ponerse la fracción que incluya al tercer elemento conocido, es decir, al lado o ángulo restante conocido.

Ejemplo 1: Resolver el triángulo de la figura 7.2.

Solución: El par conocido **lado-ángulo opuesto**, es el lado que mide 29 y su ángulo opuesto de 21 grados. Con ellos se formará fracción del lado izquierdo del signo igual. El tercer elemento conocido es el lado que mide 36, de manera que la fracción del lado derecho del signo igual se construirá con ese lado y su ángulo opuesto.

$$\frac{29}{\text{sen } 21} = \frac{36}{\text{sen } \delta}$$

Para despejar  $\text{sen } \delta$ , deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se logra multiplicando toda la igualdad simultáneamente por  $\text{sen } 21$  y por  $\text{sen } \delta$ , con-

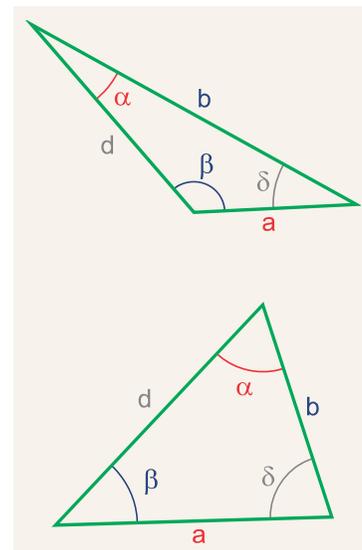


figura 7.1

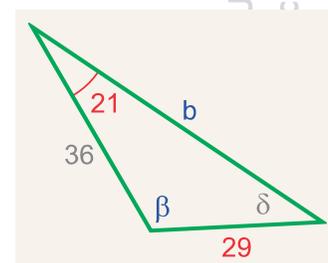


figura 7.2

forme a la ley de las igualdades o ley uniforme que dice que *lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado para que la igualdad se conserve*. Recordar que es falso que “pasan” al otro lado a multiplicar:

$$(\cancel{\text{sen } 21}) (\text{sen } \delta) \left[ \frac{29}{\cancel{\text{sen } 21}} \right] = (\text{sen } 21) (\cancel{\text{sen } \delta}) \left[ \frac{36}{\cancel{\text{sen } \delta}} \right]$$

$$29 \text{ sen } \delta = 36 \text{ sen } 21$$

dividiendo todo entre 29 para despejar  $\text{sen } \delta$  y recordando que es falso que “pasa” al otro lado a dividir.

$$\frac{\cancel{29} \text{ sen } \delta}{\cancel{29}} = \frac{36 \text{ sen } 21}{29}$$

realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando  $\delta$  :

$$\text{sen } \delta = 0.444870557$$

$$\delta = \text{arc sen } 0.444870557$$

$$\delta = 26.415$$

En este momento se llevan conocidos dos ángulos, de manera que el tercero se obtiene por simple diferencia a 180, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180. Así que

$$\beta = 180 - 21 - 26.415$$

$$\beta = 132.584$$

Finalmente, para calcular el tercer lado simplemente se vuelve a aplicar la ley de los senos, aprovechando que en este momento ya se conoce el ángulo  $\beta$ :

$$\frac{29}{\text{sen } 21} = \frac{b}{\text{sen } 132.584}$$

Para despejar el lado  $b$ , deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por el denominador  $\text{sen } 132.584$  para eliminarlo. Recordar que es falso que “pasa” al otro lado a multiplicar:

$$(\text{sen } 132.584) \left[ \frac{29}{\text{sen } 21} \right] = (\cancel{\text{sen } 132.584}) \left[ \frac{b}{\cancel{\text{sen } 132.584}} \right]$$

$$\frac{29 \text{ sen } 132.584}{\text{sen } 21} = b$$

que debe escribirse invertido de la siguiente forma:

$$b = \frac{29 \text{ sen } 132.584}{\text{sen } 21}$$

ya que se lee de izquierda a derecha y lo que debe leerse primero es la cosa o el objeto del que se desea saber algo, en este caso  $b$ . El alumno debe tomar como una regla práctica que siempre que se despeje cualquier cosa, **lo despejado debe escribirse del lado izquierdo del signo igual**, por la razón previamente citada.

Haciendo las operaciones indicadas se llega a que

$$b = 59.581$$

Ejemplo 2: Resolver el triángulo de la figura 7.3.

Solución: El par conocido **lado-ángulo opuesto**, es el lado que mide 51 y su ángulo opuesto es el de 68 grados. Con ellos se formará la fracción del lado izquierdo del signo igual. El tercer elemento conocido es el ángulo que mide 79, de manera que la fracción del lado derecho del signo igual se construirá con ese ángulo y su lado opuesto.

$$\frac{51}{\text{sen } 68} = \frac{a}{\text{sen } 79}$$

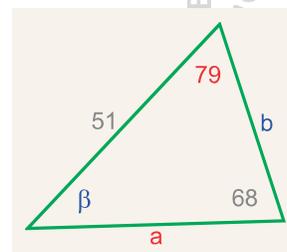


figura 7.3

Para despejar el **lado  $a$** , deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por **sen 79** para eliminar su denominador. Recordar que es falso que “pasa” al otro lado a multiplicar:

$$(\text{sen } 79) \left[ \frac{51}{\text{sen } 68} \right] = (\cancel{\text{sen } 79}) \left[ \frac{a}{\cancel{\text{sen } 79}} \right]$$

$$\frac{51 \text{ sen } 79}{\text{sen } 68} = a$$

que debe escribirse invertido de la siguiente forma:

$$a = \frac{51 \operatorname{sen} 79}{\operatorname{sen} 68}$$

ya que se lee de izquierda a derecha y lo que debe leerse primero es lo que interesa definir, es decir, lo que interesa saber qué es, es  $a$ .

Haciendo las operaciones indicadas se llega a que

$$a = 53.9946$$

El ángulo  $\beta$  puede obtenerse fácilmente por simple diferencia a 180, ya que la suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180 grados y de ellos ya se conocen dos. Entonces

$$\beta = 180 - (79 + 68)$$

$$\beta = 33$$

Finalmente, para calcular el tercer lado simplemente se vuelve a aplicar la ley de los senos, aprovechando que en este momento ya se conocen los tres ángulos y dos lados. Se recomienda utilizar el “par conocido” *lado-ángulo opuesto* original, de ser posible, para lograr mayor exactitud en los cálculos o evitar arrastrar posibles errores de cálculos anteriores.

$$\frac{51}{\operatorname{sen} 68} = \frac{b}{\operatorname{sen} 33}$$

Para despejar el **lado  $b$** , deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por el denominador  $\operatorname{sen} 33$  para eliminarlo. Recordar que es falso que “pasa” al otro lado a multiplicar:

$$(\operatorname{sen} 33) \left[ \frac{51}{\operatorname{sen} 68} \right] = (\cancel{\operatorname{sen} 33}) \left[ \frac{b}{\cancel{\operatorname{sen} 33}} \right]$$

$$\frac{51 \operatorname{sen} 33}{\operatorname{sen} 68} = b$$

que debe escribirse invertido de la siguiente forma:

$$b = \frac{51 \operatorname{sen} 33}{\operatorname{sen} 68}$$

ya que se lee de izquierda a derecha y lo que debe leerse primero es la cosa o el objeto del que se desea saber algo, en este caso  $b$ .

Haciendo las operaciones indicadas se llega a que

$$b = 29.958$$

### 7.3 LEY DE LOS COSENOS

La ley de los cosenos es aplicable a cualquier triángulo si dentro de los tres elementos conocidos no se tiene “el par conocido” **un lado y su ángulo opuesto**, lo que significa que los tres elementos conocidos son dos lados y el ángulo que forman, o bien los tres lados. Si se tuvieran un lado y sus dos ángulos adyacentes conocidos, es más fácil calcular el tercer ángulo por diferencia a 180 y luego aplicar la ley de los senos, pues en ese momento ya se tendrían un lado y su ángulo opuesto conocidos.

La ley de los cosenos por ser más laboriosa, se utiliza solamente cuando la ley de los senos no se puede emplear por no tener “el par conocido” **lado-ángulo opuesto**.

La ley de los cosenos dice que:

#### En todo triángulo se cumple que

*Un lado cualquiera al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.*

Respecto de la figura 7.4, en cualquiera de los 2 triángulos, conforme a la ley anterior, se cumplen las tres siguientes igualdades:

$$a^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta$$

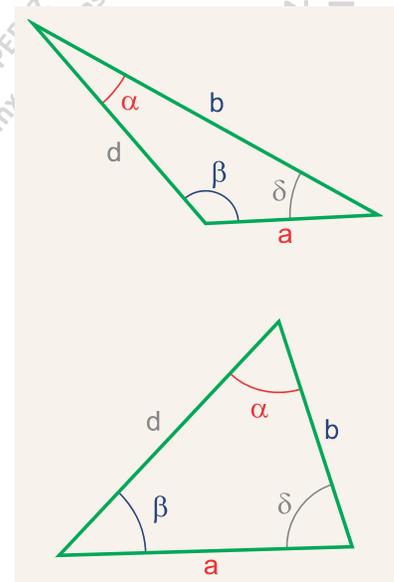


figura 7.4

Ejemplo 3: Resolver el triángulo de la figura 7.5

Solución: Como no se tiene ningún par **lado-ángulo opuesto conocidos**, ya que al lado conocido que mide 36 se le opone el ángulo desconocido  $\beta$ ; al lado conocido que mide 29 se le opone el ángulo desconocido  $\alpha$ ; y al ángulo conocido que mide 103 grados se le opone el lado desconocido  $d$ , entonces no se puede utilizar la ley de los senos y por descalificación se emplea la ley de los cosenos.

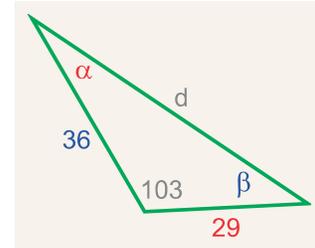


figura 7.5

De manera que utilizando la tercera igualdad

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta$$

sustituyendo valores se obtiene que

$$d^2 = 36^2 + 29^2 - 2(36)(29) \cos 103$$

$$d^2 = 1296 + 841 - 2088 \cos 103$$

$$d^2 = 1296 + 841 - 2088 (- 0.224951054)$$

$$d^2 = 1296 + 841 + 469.6978008$$

$$d^2 = 2606.697801$$

$$d = \sqrt{2606.697801}$$

$$d = 51.05583$$

En este momento ya se tiene el par **lado-ángulo opuesto conocidos**, que son el lado recién obtenido  $d = 51.05583$  y su ángulo opuesto que vale 103 grados, de manera que ya se puede emplear la ley de los senos:

$$\frac{51.05583}{\text{sen } 103} = \frac{29}{\text{sen } \alpha}$$

Para despejar  $\text{sen } \alpha$  deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se consigue multiplicando toda la igualdad (recordar la ley de las igualdades) por ambos denominadores. Recordar que es falso que “pasan” al otro lado a multiplicar. Haciéndolo en forma simultánea resulta:

$$(\cancel{\text{sen } 103}) (\text{sen } \alpha) \left[ \frac{51.05583}{\cancel{\text{sen } 103}} \right] = (\text{sen } 103) (\cancel{\text{sen } \alpha}) \left[ \frac{29}{\cancel{\text{sen } \alpha}} \right]$$

$$51.05583 \operatorname{sen} \alpha = 29 \operatorname{sen} 103$$

dividiendo todo entre 51.05583 para despejar  $\operatorname{sen} \alpha$  y recordando que es falso que “pasa” al otro lado a dividir:

$$\frac{\cancel{51.05583} \operatorname{sen} \alpha}{\cancel{51.05583}} = \frac{29 \operatorname{sen} 103}{51.05583}$$

realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando  $\alpha$  :

$$\operatorname{sen} \alpha = 0.553447703$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.553447703$$

$$\alpha = 33.6038$$

En este momento se llevan conocidos dos ángulos, de manera que el tercero se obtiene por simple diferencia a 180, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180. Así que

$$\beta = 180 - 103 - 33.6038$$

$$\beta = 43.3962$$

Ejemplo 4: Resolver el triángulo de la figura 7.6.

Solución: Como no se tiene ningún par **lado-ángulo opuesto conocidos**, ya que al lado conocido que mide 50 se le opone el ángulo desconocido  $\beta$ ; al lado conocido que mide 39 se le opone el ángulo desconocido  $\alpha$  y al ángulo conocido que mide 79 grados se le opone el lado desconocido  $d$ , entonces no se puede utilizar la ley de los senos y por descalificación se emplea la ley de los cosenos.

De manera que utilizando la tercera igualdad

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta$$

sustituyendo valores se obtiene que

$$d^2 = 50^2 + 39^2 - 2(50)(39) \cos 79$$

$$d^2 = 2500 + 1521 - 3900 \cos 79$$

$$d^2 = 2500 + 1521 - 3900 (0.190808995)$$

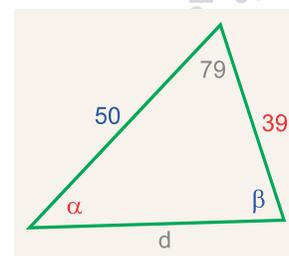


figura 7.6

$$d^2 = 2500 + 1521 - 744.1550805$$

$$d^2 = 3276.84492$$

$$d = \sqrt{3276.84492}$$

$$d = 57.24373$$

En este momento ya se tiene el par **lado-ángulo opuesto conocidos**, que son el lado recién obtenido  $d = 57.24373$  y su ángulo opuesto que vale 79 grados, de manera que ya se puede emplear la ley de los senos:

$$\frac{57.24373}{\text{sen } 79} = \frac{39}{\text{sen } \alpha}$$

Para despejar  $\text{sen } \alpha$  deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se consigue multiplicando toda la igualdad (recordar la ley de las igualdades) por ambos denominadores. Recordar que es falso que “pasan” al otro lado a multiplicar. Haciéndolo en forma simultánea resulta:

$$\cancel{(\text{sen } 79)} (\text{sen } \alpha) \left[ \frac{57.24373}{\cancel{\text{sen } 79}} \right] = (\text{sen } 79) \cancel{(\text{sen } \alpha)} \left[ \frac{39}{\cancel{\text{sen } \alpha}} \right]$$

$$57.24373 \text{ sen } \alpha = 39 \text{ sen } 79$$

dividiendo todo entre 57.24373 para despejar  $\text{sen } \alpha$  y recordando que es falso que “pasa” al otro lado a dividir.

$$\frac{\cancel{57.24373} \text{ sen } \alpha}{\cancel{57.24373}} = \frac{39 \text{ sen } 79}{57.24373}$$

realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando  $\alpha$ :

$$\text{sen } \alpha = 0.668779972$$

$$\alpha = \text{arc sen } 0.668779972$$

$$\alpha = 41.9729$$

En este momento se llevan conocidos dos ángulos, de manera que el tercero se obtiene por simple diferencia a 180, ya que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180.

así que

$$\beta = 180 - 79 - 41.9729$$

$$\beta = 59.027$$

Ejemplo 5: Resolver el triángulo de la figura 7.7.

Este ejemplo tiene por objetivo mostrar un error muy frecuente que se comete en la resolución de triángulos y que aparentemente está bien resuelto.

El meollo del asunto es que **cuando no se tiene experiencia no debe calcularse el ángulo mayor por la ley de los senos**, sino por diferencia a 180 una vez obtenidos los otros dos ángulos, en virtud de lo siguiente:

- 1) En todo triángulo hay por lo menos dos ángulos agudos; el otro puede ser también agudo, o bien recto o de más de 90 grados. En otras palabras, el ángulo mayor de un triángulo puede o no ser de más de 90 grados. Cuando mucho hay un ángulo de más de 90 grados.
- 2) En todo triángulo, al lado mayor se le opone el ángulo mayor y al lado menor se le opone el ángulo menor. Por lo tanto, al lado intermedio se le opone el ángulo intermedio.
- 3) Como el *arco seno* positivo tiene soluciones en el primero y en el segundo cuadrante, es decir, una solución es de menos de 90 grados y la otra entre 90 y 180 grados, al emplear la *ley de los senos* para calcular el ángulo mayor, al momento de sacar *arco seno*, éste puede ser un valor del primero o del segundo cuadrante. Si es del segundo cuadrante, o sea entre 90° y 180° la calculadora muestra en pantalla el valor del primer cuadrante, es decir entre 0° y 90°.

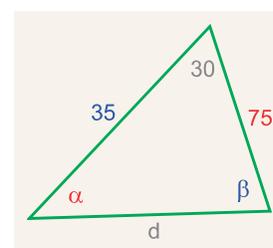


figura 7.7

Solución: Como no se tiene ningún par **lado-ángulo opuesto conocidos**, ya que al lado conocido que mide 35 se le opone el ángulo desconocido  $\beta$ ; al lado conocido que mide 75 se le opone el ángulo desconocido  $\alpha$  y al ángulo conocido que mide 30 grados se le opone el lado desconocido  $d$ , entonces no se puede utilizar la ley de los senos y por descalificación se emplea la ley de los cosenos.

De manera que utilizando la tercera igualdad

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta$$

sustituyendo valores se obtiene que

$$d^2 = 35^2 + 75^2 - 2(35)(75) \cos 30$$

$$d^2 = 1225 + 5625 - 5250 \cos 30$$

$$d^2 = 1225 + 5625 - 5250 (0.866025403)$$

$$d^2 = 1225 + 5625 - 4546.633366$$

$$d^2 = 2303.366634$$

$$d = \sqrt{2303.366634}$$

$$d = 47.9934$$

En este momento ya se tiene el par **lado-ángulo opuesto conocidos**, que son el lado recién obtenido  $d = 47.9934$  y su ángulo opuesto que vale 30 grados, de manera que ya se puede emplear la ley de los senos.

Sin embargo, obsérvese que los lados miden 35 (opuesto al ángulo  $\beta$ ),  $d = 47.9934$  (opuesto al ángulo 30) y el otro mide 75 (opuesto al ángulo  $\alpha$ ). Por lo tanto, el ángulo mayor es el ángulo  $\alpha$  por oponerse al lado mayor. Para mostrar el error que se suele cometer si se calcula el ángulo mayor (el que se opone al lado mayor, en este caso  $\alpha$ ), con toda intención se va a calcular el ángulo  $\alpha$ , de lo que se obtiene:

$$\frac{47.9934}{\text{sen } 30} = \frac{75}{\text{sen } \alpha}$$

Para despejar  $\text{sen } \alpha$  deben quitarse primero los dos denominadores, lo cual se logra multiplicando toda la igualdad (tener en cuenta la ley de las igualdades) por ambos denominadores. Recordar que es falso que los denominadores “pasan” al otro lado multiplicando. Haciéndolo en forma simultánea resulta:

$$\cancel{(\text{sen } 30)} (\text{sen } \alpha) \left[ \frac{47.9934}{\cancel{\text{sen } 30}} \right] = (\text{sen } 30) \cancel{(\text{sen } \alpha)} \left[ \frac{75}{\cancel{\text{sen } \alpha}} \right]$$

$$47.9934 \text{ sen } \alpha = 75 \text{ sen } 30$$

Dividiendo todo entre 47.9934 para despejar  $\text{sen } \alpha$  (recordar que es falso que “pasa” al otro lado a dividir)

$$\frac{47.9934 \text{ sen } \alpha}{47.9934} = \frac{75 \text{ sen } 30}{47.9934}$$

Realizando las operaciones indicadas en el lado derecho y despejando  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= 0.78135 \\ \alpha &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0.78135\end{aligned}$$

$$\alpha = 51.38$$

Así que por diferencia a 180 grados,

$$\beta = 180 - (30 + 51.38)$$

$$\beta = 98.62$$

Aparentemente no ha habido ningún error en el procedimiento y la solución parecería ser la mostrada en la figura 7.8. Sin embargo puede verse que **hay una incongruencia en los resultados**: al lado mayor se le opone el ángulo intermedio; al lado menor se le opone el ángulo mayor y al lado intermedio se le opone el ángulo menor. Por lo tanto, hubo algo incorrecto.

Efectivamente, como se advirtió al principio de este ejemplo, no se debe calcular el ángulo mayor por medio de la ley de los senos cuando se tiene poca experiencia porque éste podría ser de más de 90 grados y la calculadora, al sacar el *arco seno* correspondiente únicamente proporciona el de menos de 90 grados. Y así sucedió en este ejemplo.

Si se observa, cuando se empleó la ley de los senos en la relación

$$\frac{47.9934}{\operatorname{sen} 30} = \frac{75}{\operatorname{sen} \alpha}$$

se calculó el ángulo mayor (el ángulo  $\alpha$ ), lo cual ya se sabía porque se opone al lado mayor. Lo correcto, para evitar estos riesgos de equivocación, es calcular el otro ángulo desconocido que con toda certeza no es el mayor, o sea **el ángulo  $\beta$** .

Haciéndolo entonces correctamente se obtiene:

$$\frac{47.9934}{\operatorname{sen} 30} = \frac{35}{\operatorname{sen} \beta}$$

Para despejar **sen  $\beta$**  deben quitarse primero los dos denominadores, siguiendo el procedimiento antes mostrado. Haciéndolo resulta:

$$(\cancel{\operatorname{sen} 30}) (\operatorname{sen} \beta) \left[ \frac{47.9934}{\cancel{\operatorname{sen} 30}} \right] = (\operatorname{sen} 30) (\cancel{\operatorname{sen} \beta}) \left[ \frac{35}{\cancel{\operatorname{sen} \beta}} \right]$$

$$47.9934 \operatorname{sen} \beta = 35 \operatorname{sen} 30$$

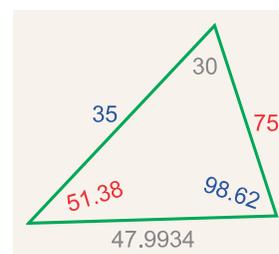


figura 7.8

Dividiendo todo entre 47.9934 para despejar  $\text{sen } \beta$ , insistiendo en que es falso que “pase a dividir”:

$$\frac{\cancel{47.9934} \text{ sen } \beta}{\cancel{47.9934}} = \frac{35 \text{ sen } 30}{47.9934}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } \beta &= 0.36463347 \\ \beta &= \text{arc sen } 0.36463347 \end{aligned}$$

$$\beta = 21.385$$

Así que por diferencia a 180 grados,

$$\alpha = 180 - (30 + 21.385)$$

$$\alpha = 128.615$$

La solución correcta es la mostrada en la figura 7.9. Puede verse que ya hay congruencia en los resultados: al lado mayor se le opone el ángulo mayor; al lado menor se le opone el ángulo menor y al lado intermedio se le opone el ángulo intermedio.

Cuidado: Una cosa es que los resultados sean congruentes y otra cosa es que la figura esté bien hecha. La figura 7.9 está mal hecha en el sentido de que no guarda proporción con los valores. Por ejemplo, el ángulo mayor de 128.615 es un ángulo obtuso y sin embargo está dibujado como agudo. Pero el hecho de que la figura no esté proporcionada no altera los valores reales de los lados y de los ángulos del triángulo en cuestión. Allí hay un problema de dibujo, no de matemáticas. De hecho, la figura debería ser como lo muestra la figura 7.10.

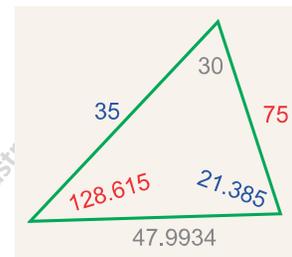


figura 7.9



figura 7.10

Ejemplo 6: Calcular la distancia que hay en un cubo de 20 cm de lado, desde uno de sus vértices hasta el centro del cuadrado de la cara opuesta, figura 7.11.

Solución: Cuando se requiere resolver algún problema de un cuerpo geométrico en tres dimensiones, deben construirse triángulos por planos, de preferencia triángulos rectángulos por ser más fáciles de resolver, de tal manera que la distancia  $d$  pedida pertenezca a un triángulo cuyos lados o ángulos se hayan podido obtener a través de otros triángulos.

En la figura 7.11, la distancia pedida  $d$  es la que va desde el vértice  $g$  hasta el punto central  $f$  de la cara opuesta. El alumno en este tipo de problemas debe activar a lo máximo posible su imaginación espacial, es decir, imaginarse los cuerpos en el espacio.

Obsérvese que dicha distancia  $d$  es la hipotenusa del triángulo rectángulo  $cfg$ , del cual se sabe que el lado  $gc$  mide 20 cm. por ser una cara del cubo. El primer paso entonces es calcular cuánto mide la distancia  $fc$  que pertenece al triángulo mencionado  $cfg$ . Para ello es necesario analizar el cuadrado  $abce$ , que si en la figura 7.11 está en perspectiva, se puede dibujar en el plano de la hoja para verlo con más claridad, el cual se muestra en la figura 7.12.

La distancia  $fc$  puede obtenerse de dos formas: Una, considerando el triángulo rectángulo  $abc$ , del cual se conocen las medidas de sus dos catetos  $ab$  y  $bc$  que miden 20 cm. Por el teorema de Pitágoras se puede calcular la hipotenusa  $ac$  y la mitad es la distancia buscada  $fc$ . La otra forma es analizando el triángulo rectángulo  $bcf$  del que se sabe que sus ángulos miden 45 grados y la hipotenusa  $bc$  20 cm. Con la función *seno* (o *coseno*) se obtiene el valor de  $fc$ .

Haciéndolo de la primera forma, a partir del triángulo rectángulo  $abc$ , por el teorema de Pitágoras se obtiene que

$$ac = \sqrt{20^2 + 20^2}$$

$$ac = \sqrt{800}$$

$$ac = 28.2842 \text{ cm.}$$

y por lo tanto,

$$fc = \frac{ac}{2}$$

$$fc = 14.1421 \text{ cm.}$$

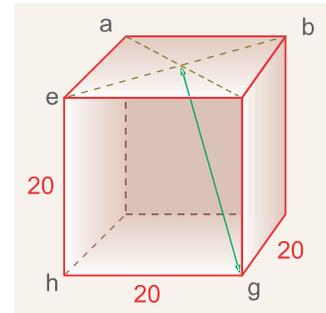


figura 7.11

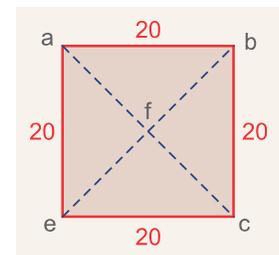


figura 7.12

Con estos datos se puede ya pasar al triángulo **fcg** (ver figura 7.11), el cual está en perspectiva en dicha figura, pero dibujándolo en el plano del papel puede apreciarse como en la figura 7.13.

Sabiendo que

$$\begin{aligned} fc &= 14.1421 \text{ cm.} \\ cg &= 20 \text{ cm. (es un lado del cubo)} \end{aligned}$$

por el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$fg = \sqrt{20^2 + 14.1421^2}$$

$$fg = 24.494$$

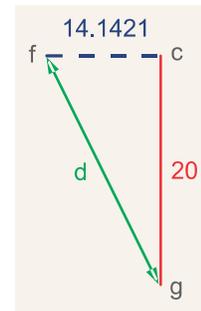


figura 7.13

Ejemplo 7: Se construye el pentágono regular de la figura 7.14, cuyos lados miden 60 cm. cada uno. Calcular la longitud de los lados del triángulo **bde** formado por dos diagonales y un lado del pentágono, así como los tres ángulos interiores de dicho triángulo.

Solución: Como puede verse en la figura 7.15, la suma de los ángulos interiores del pentágono es  $p + q + r + s + t = 360$  y todos son iguales, cualquiera de ellos, por ejemplo **q** mide

$$q = \frac{360}{5} = 72$$

Por otra parte, en el triángulo **abf** de la misma figura 7.15, la suma de los ángulos  $\beta + \theta + q = 180$  porque los ángulos internos de todo triángulo dan  $180^\circ$ , o sea que

$$\beta + \theta + 72 = 180$$

porque  $q = 72$  por ser la quinta parte de toda la circunferencia y como  $\beta = \theta$ , entonces cada uno de ellos mide la mitad de 108, por lo tanto  $\beta = 54$ . Además, como todos los triángulos interiores del pentágono son iguales, entonces también  $\alpha = \beta = 54$  y, por lo tanto,  $\alpha + \beta = 108$ , que corresponde al ángulo **eab** de la figura 7.14.

En la figura 7.14, el triángulo **eab** es isósceles, ya que los lados  $ea = ab$  por ser lados del polígono regular.

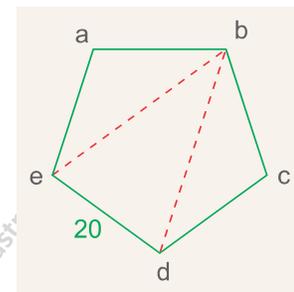


figura 7.14

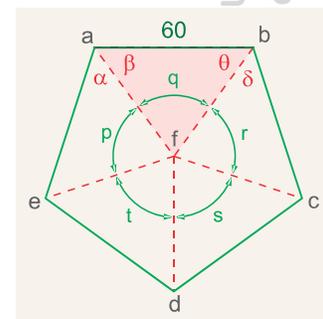


figura 7.15

Por lo tanto los ángulos  $aeb$  y  $abe$  son iguales y deben de medir 36 grados, como lo muestra la figura 7.16, recordando que en párrafos recién anteriores se dedujo que el ángulo del pentágono con vértice en  $a$  mide 108 grados. De hecho por tratarse de un pentágono regular todos los ángulos formados por dos lados del mismo miden 108 grados.

Por eso el ángulo  $aed = eab = 108$ , por lo tanto el ángulo  $bed$  debe medir  $108 - 36 = 72$ .

El triángulo  $bed$  es isósceles, ya que  $be = bd$  por ser diagonales, por lo tanto el ángulo  $edb$  también debe medir 72 grados. Finalmente, por diferencia a 180 se obtiene que el ángulo  $ebd$  mide 36 grados (ver figura 7.16).

De esta manera se tienen ya los tres ángulos interiores del triángulo  $ebd$  y además se sabe que el lado  $ed$  mide 60 cms. por ser un lado del polígono. Ver figura 7.17.

De manera que por la ley de los senos (triángulo  $ebd$ , figura 7.17):

$$\frac{60}{\text{sen } 36} = \frac{eb}{\text{sen } 72}$$

$$eb = \frac{60 \text{ sen } 72}{\text{sen } 36}$$

$$eb = 97.082$$

Y como  $eb = bd$ , el problema ha quedado resuelto.

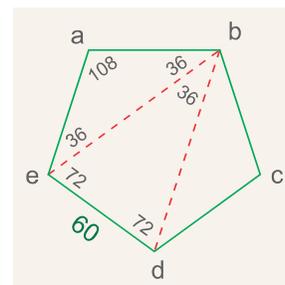


figura 7.16

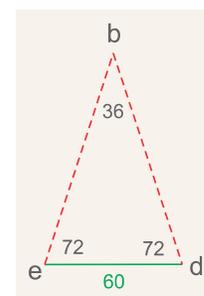


figura 7.17

**EJERCICIO 7.1**

Resolver los siguientes triángulos, respecto de la figura 7.18, si se tienen en cada caso los siguientes datos:

- 1)  $p = 26$  ;  $q = 35$  ;  $\alpha = 42$
- 2)  $p = 60$  ;  $r = 49$  ;  $\delta = 42$
- 3)  $q = 46$  ;  $r = 35$  ;  $\beta = 122$
- 4)  $p = 48$  ;  $q = 49$  ;  $\beta = 97$
- 5)  $p = 20$  ;  $r = 35$  ;  $\beta = 152$
- 6)  $q = 77$  ;  $r = 41$  ;  $\alpha = 30$
- 7)  $q = 16$  ;  $\alpha = 35$  ;  $\beta = 107$
- 8)  $p = 81$  ;  $\delta = 40$  ;  $\beta = 111$
- 9)  $r = 22$  ;  $\beta = 113$  ;  $\delta = 27$
- 10)  $p = 85$  ;  $\delta = 39$  ;  $\alpha = 18$
- 11)  $p = 30$  ;  $q = 40$  ;  $r = 26$
- 12)  $p = 100$  ;  $q = 135$  ;  $r = 90$
- 13)  $p = 75$  ;  $q = 122$  ;  $r = 18$
- 14)  $p = 63$  ;  $q = 88$  ;  $r = 7$

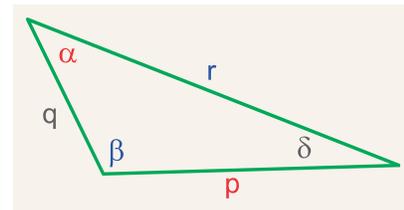


figura 7.18

Resolver los siguientes triángulos, respecto de la figura 7.19, si se tienen en cada caso los siguientes datos:

- 15)  $p = 23$  ;  $q = 21$  ;  $\alpha = 62$
- 16)  $p = 62$  ;  $r = 48$  ;  $\delta = 44$
- 17)  $q = 49$  ;  $r = 39$  ;  $\beta = 72$
- 18)  $p = 68$  ;  $q = 49$  ;  $\beta = 47$
- 19)  $p = 27$  ;  $r = 33$  ;  $\beta = 52$
- 20)  $q = 70$  ;  $r = 54$  ;  $\alpha = 45$
- 21)  $q = 19$  ;  $\alpha = 58$  ;  $\beta = 37$
- 22)  $p = 80$  ;  $\delta = 46$  ;  $\beta = 56$
- 23)  $r = 25$  ;  $\beta = 53$  ;  $\delta = 70$
- 24)  $p = 85$  ;  $\delta = 39$  ;  $\alpha = 80$
- 25)  $p = 20$  ;  $q = 17$  ;  $r = 28$
- 26)  $p = 224$  ;  $q = 128$  ;  $r = 183$
- 27)  $p = 120$  ;  $q = 100$  ;  $r = 10$
- 28)  $p = 150$  ;  $q = 85$  ;  $r = 300$

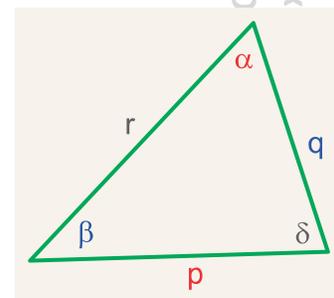


figura 7.19

- 29) Se construye el triángulo  $dcb$  mostrado en la figura 7.20. La recta  $bc$  es horizontal. Desde el vértice  $c$  se traza la vertical  $ac$  hasta intersectar con el lado  $db$ . Calcular la longitud del segmento  $ac$ .

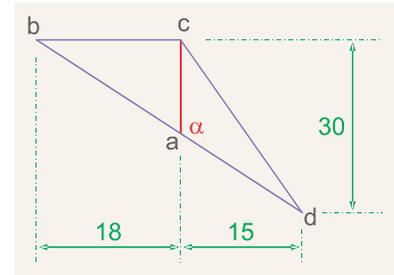


figura 7.20

- 30) En el problema anterior, respecto de la figura 7.20, calcular el valor del ángulo  $\alpha$ .

- 31) Se construye el triángulo  $abc$  mostrado en la figura 7.21. El lado  $bc$  es horizontal. Se ubica el punto  $e$  a 8 unidades del vértice  $c$  y a 10 unidades del vértice  $b$ . Desde ese punto  $e$  se traza una recta  $ed$  paralela al lado  $ac$ . Calcular la longitud del segmento  $ed$ .

Nota: Este problema se puede resolver fácilmente por medio de triángulos semejantes, pero se recomienda que no se resuelva así, sino por medio de la ley de los senos y/o de los cosenos por ser el tema en estudio.

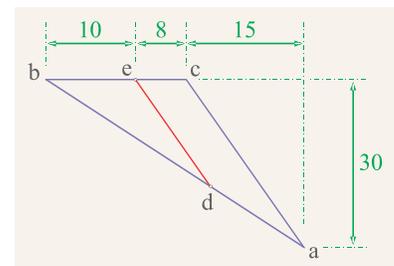


figura 7.21

- 32) Calcular la altura  $h$  en una pirámide formada por triángulos equiláteros de 80 cm. de lado cada uno (figura 7.22).

- 33) Si la altura de la pirámide formada por triángulos equiláteros de la figura 7.22 mide 75 cm., ¿Cuánto miden sus lados?

- 34) Se construye un heptágono regular de 25 cm. de lado (ver figura 7.23). Calcular cuánto miden los ángulos interiores del triángulo  $abc$ , así como la longitud de sus lados  $ab$  y  $ac$ .

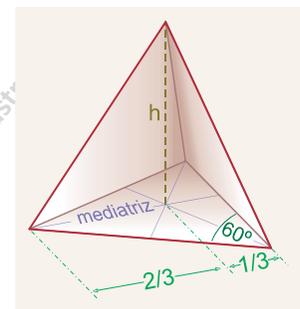


figura 7.22

- 35) Si en el heptágono regular de la figura 7.23 el lado  $ab$  mide 20 cm., ¿Cuánto miden los lados del polígono?

- 36) Se construye una pirámide recta de base cuadrangular (ver figura 7.24), cuyos lados miden 50 cm. y la altura  $eg$  mide 70 cm. Calcular cuánto miden las aristas  $eb$ ,  $ec$ , etc.

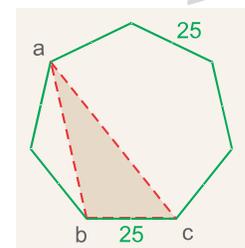


figura 7.23

- 37) En el problema anterior, calcular el ángulo de inclinación  $\theta$  de la cara triangular  $ebc$  respecto de la base cuadrada  $abcd$ .
- 38) En el problema de la figura 7.24, si las aristas  $eb$ ,  $ec$ , etc. miden 90 cm y el ángulo  $\theta$  formado por la base cuadrangular y una de las caras triangulares laterales mide 50 grados, calcular la altura  $eg$  de la pirámide.
- 39) Se construye el triángulo rectángulo isósceles  $ABC$  de la figura 7.25, cuyos catetos miden 60 cm. cada uno. El cateto horizontal  $BC$  se divide en tres partes iguales de 20 cm. cada una y a partir de los puntos  $d$  y  $e$  se trazan las líneas verticales  $df$  y  $eg$ . Luego se unen los vértices  $A$  con  $d$  por una parte y por otra  $e$  con  $f$ . Calcular el valor de los ángulos  $\theta$  y  $\beta$  mostrados en la figura 7.25.
- 40) En el triángulo de la figura 7.25 (problema anterior), ¿cuánto mide  $Ad$ ?
- 41) Un hombre construye una casita de campo como se muestra en la figura 7.26. El techo es a dos aguas de 4 metros cada parte y forman un ángulo de 135 grados. Si de los extremos de la fachada, tanto izquierdo como derecho, hasta el inicio de la puerta hay 2.795 metros de barda, ¿qué ancho tiene la puerta?

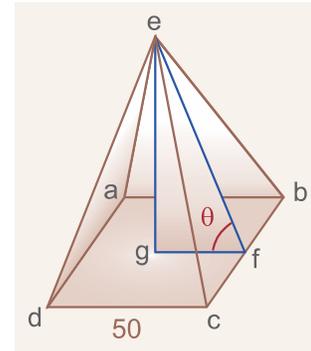


figura 7.24

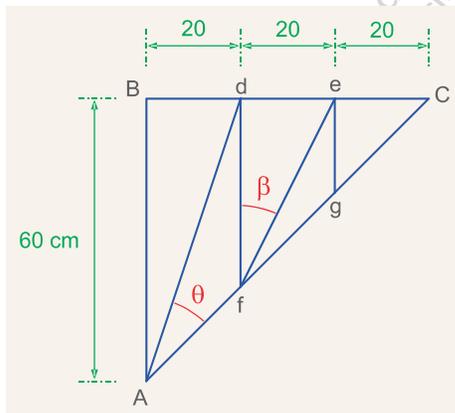


figura 7.25

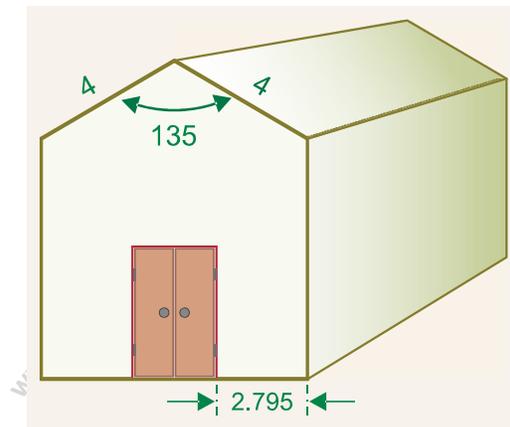


figura 7.26