CAPÍTULO 6

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

6.1 FUNCIONES TRASCENDENTES

Las funciones trascendentes se caracterizan por tener lo que se llama *argumento*. Un argumento es el número o letras que lo simbolizan que hacen que una función adquiera un valor, es decir, que se convierta en un número. Sin él, la función es vacía, o sea, no tiene valor.

Por ejemplo, la función *sen* (seno) es vacía, no tiene ningún valor porque le falta el argumento, le falta ese número que la transforme en una cantidad concreta. Si a la función anterior se le agrega un número cualquiera, por ejemplo el 26 para tener *sen* 26 entonces esto ya adquiere un valor, el cual es $sen\ 26 = 0.4383711$. A este número 26 que hizo que *sen* adquiriera un valor se le llama *argumento*.

Otro ejemplo: la función *log* (logaritmo) es vacía, no tiene asociado ningún valor, pero si se le agrega 107 para tener *log* 107 entonces así ya adquiere el valor $log\,107 = 2.029383$. En este caso el 107 es el *argumento* de la función logaritmo.

De la misma forma, *arc tan* (arco tangente o tangente inversa) es vacía, no tiene asociado ningún valor, pero si se le agrega el número 1.23 para tener *arc tan* 1.23 ya adquiere el valor $arc\ tan\ 1.23 = 50.8886$. En este caso el número 1.23 es el *argumento* de la función *arc tan*.

Las principales funciones trascendentes son:

a) *trigonométricas*;
b) *trigonométricas inversas* y
c) *logarítmicas y exponenciales*.

No son todas, pero las que se van a estudiar en este curso serán ésas. Dos características interesantes en todas las fórmulas de derivación de las funciones trascendentes son que el argumento está representado siempre por la letra u y la segunda es que todas las fórmulas terminan multiplicando por la derivada del argumento, o sea por $\dfrac{du}{dx}$.

Es conveniente tener presentes las reglas de escritura matemática para identificar el argumento en una función trascendente, en las que *el símbolo de la función* se refiere a la escritura con la que se invoca la función correspondiente. Por ejemplo, *sen* es el símbolo de la función *seno*; *cos* es el símbolo de la función *coseno*; *log* es el símbolo de la función *logaritmo*, etc.

Dichas reglas son:

1) *El argumento comienza con el símbolo escrito inmediatamente después del símbolo de la función.*

Ejemplos:

a) $cos\left(3x+1\right)$

El argumento comienza con el paréntesis por ser lo que está inmediatamente después del símbolo de la función *cos*. Por razones obvias, termina donde cierra el paréntesis.

b) $\quad tan\sqrt{x^2 - 7x}$

El argumento comienza con la raíz cuadrada por ser lo que está escrito inmediatamente después del símbolo de la función *tan*.

c) $\quad arc\ sec\ 2x^2y$

El argumento comienza con el número 2 por ser lo que está inmediatamente después del símbolo de la función *arc sec*.

d) $\quad tan\ cos\ 4x$

El argumento comienza con la función *coseno* por ser lo que está escrito inmediatamente después del símbolo de la función *tan*, es decir, el argumento de la *tangente* es *cos* 4*x*.

2) *Todos los factores monomios pertenecen al argumento. En el caso de que alguno no sea parte del argumento, éste debe escribirse antes de la función trascendente.*

Ejemplo:

a) $\quad sen\ \underbrace{3ab^3xy^5}$

Todos éstos son factores monomios, por lo tanto el argumento de la función *seno* es $3ab^3xy^5$. En caso de que, por ejemplo, y^5 no fuera parte del argumento, así está mal escrito y debe escribirse $y^5\ sen\ 3ab^3x$.

3) *Solamente el primer término pertenece al argumento. En caso de que otros términos sean parte del argumento, deben encerrarse entre paréntesis. O en caso de que no lo sean, deben escribirse antes de la función trascendente.*

Ejemplo:

$csc\ 2x^4 + 6x - 3$

Una escritura así provoca la duda ¿$6x$ - 3 son también parte del argumento? Conforme a esta regla, no son y debería escribirse como $6x - 3 + csc\ 2x^4$. O en todo caso, si lo son su escritura correcta sería $csc\,(2x^4 + 6x - 3)$.

4) *Solamente el 1^{er} factor polinomio es parte del argumento. En caso de que un 2° factor polinomio no sea componente del argumento, debe escribirse antes de la función trascendente.*

Ejemplo:

$cot\left(x^2 + 5x - 6\right)\left(4x - 1\right)$

Esta escritura es incorrecta porque se presta a dudas: ¿El factor $(4x - 1)$ es parte del argumento? Para evitar estas ambigüedades existe la regla anterior que dice que no y que además ordena escribirlo como $\left(4x - 1\right)cos\left(x^2 + 5x - 6\right)$; pero en el caso de que fuera parte del argumento, su escritura correcta sería $cos\left[\left(x^2 + 5x - 6\right)\left(4x - 1\right)\right]$

5) *Un exponente escrito sobre el símbolo de la función indica que toda la función está elevada a dicha potencia.*

Ejemplo:

$cot^3\left(5x - 6\right)$

Este exponente indica que la función *cotangente* es la que está elevada al cubo, o sea que

$$cot^3(5x-6) = cot(5x-6)\,cot(5x-6)\,cot(5x-6)$$

6) *Un exponente escrito sobre el argumento indica que es el argumento el que está elevado a dicha potencia.*

Ejemplo

$cot(5x-6)^3$

Este exponente indica que el argumento (5*x* - 6) es el que está elevado al cubo, o sea que

$$cot(5x-6)^3 = cot\left[(5x-6)(5x-6)(5x-6)\right]$$

Nótese como se cumplen las reglas de escritura anteriores.

7) *Todo argumento negativo debe escribirse entre paréntesis.*

Ejemplo:

$sen(-2x)$

La razón de esta regla es para evitar confusiones en los inexpertos que interpretan como resta cuando se escribe $sen-2x$, a pesar de que carece de sentido una resta así, pues la función sen estaría vacía (sin argumento), ya que se estaría tomando como un término a sen y como otro término a - 2*x*.

8) *Cuando una función trascendente está dividida entre cualquier cantidad, debe escribirse la fracción que indica la división antes de la función trascendente. En caso de que sea solamente el argumento el que esté dividido, debe encerrarse el argumento entre paréntesis o en caso extremo debe escribirse la línea de fracción claramente a la mitad del símbolo de la función.*

Ejemplos

$\frac{1}{3}\,log\left(6x-1\right)$

Lo que pide esta regla es que se evite escribir el ejemplo anterior como $\dfrac{log\left(6x-1\right)}{3}$, pues es frecuente una escritura deficiente como $\dfrac{log\left(6x-1\right)}{3}$ que provoca la duda: ¿El 3 divide a toda la función o solamente al argumento?.

$sec\left(\dfrac{6x-1}{3}\right)$

Para evitar las confusiones señaladas en el ejemplo anterior, con un paréntesis en el argumento se deja en claro qué divide el 3.

6.2 FÓRMULAS PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las fórmulas de derivación de las seis funciones trigonométricas son:

(9) $$\frac{d}{dx}sen\,u = cos\,u\frac{du}{dx}$$

(10) $$\frac{d}{dx}cos\,u = -\,sen\,u\frac{du}{dx}$$

(11) $$\frac{d}{dx}tan\,u = sec^2\,u\frac{du}{dx}$$

(12) $$\frac{d}{dx}cot\,u = -\,csc^2\,u\frac{du}{dx}$$

(13) $$\frac{d}{dx}sec\,u = tan\,u\,sec\,u\frac{du}{dx}$$

$$(14) \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\cot u \csc u \frac{du}{dx}$$

Debe notarse que la derivada de una función trigonométrica es otra, u otras, función trigonométrica con el mismo argumento. Esto es muy importante: el argumento nunca cambia. Además todas las fórmulas terminan multiplicando por la derivada del argumento $\left(\dfrac{du}{dx}\right)$

Ejemplo 1: Hallar la derivada de $y = sen\ 5x$

Solución: El argumento es $5x$, o sea que $u = 5x$. Aplicando la fórmula (9) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\cos 5x}_{\cos u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}5x}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 5\cos 5x}$$

Nótese que el argumento $5x$ no cambia de la función original al resultado de la derivada.

Ejemplo 2: Hallar la derivada de $y = \cos x^2$.

Solución: El argumento es x^2, o sea que $u = x^2$. Aplicando la fórmula (10) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-\,sen\ x^2}_{-\,sen\ u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}x^2}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\,2x\ sen\ x^2}$$

Ejemplo 3: Hallar la derivada de $y = tan\ (x^2 - 3x + 5)$

Solución: El argumento es $(x^2 - 3x + 5)$, o sea que $u = x^2 - 3x + 5$. Aplicando la fórmula (11) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{sec^2\left(x^2 - 3x + 5\right)}_{sec^2\ u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3x + 5\right)}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left(2x - 3\right)sec^2\left(x^2 - 3x + 5\right)}$$

Ejemplo 4: Hallar la derivada de $y = cot\ \sqrt{7x}$

Solución: El argumento es $\sqrt{7x}$, o sea que $u = \sqrt{7x}$. Aplicando la fórmula (12):

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\sqrt{7x}\ \frac{d}{dx}\sqrt{7x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-\csc^2\sqrt{7x}}_{-\csc^2 u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}(7x)^{1/2}}_{\frac{d}{dx}u}$$

La derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\sqrt{7x}\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{n}\underbrace{(7x)}_{u}\underbrace{{}^{-1/2}}_{n-1}\underbrace{\frac{d}{dx}7x}_{\frac{d}{dx}u}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\sqrt{7x}\left[\frac{7}{2\sqrt{7x}}\right]$$

Finalmente ordenando conforme a las reglas de escritura matemática

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{7}{2\sqrt{7x}}\csc^2\sqrt{7x}}$$

Ejemplo 5: Hallar la derivada de $y = \sec\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Solución: El argumento es $\dfrac{1}{x^4}$, o sea que $u=\dfrac{1}{x^4}$. Aplicando la fórmula (13):

$$\frac{dy}{dx}=tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\left[-4x^{-5}\right]$$

Finalmente ordenando conforme a las reglas de escritura matemática

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-4}{x^5}\,tan\left(\frac{1}{x^4}\right)sec\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

Ejemplo 6: Hallar la derivada de $y=csc\left(\dfrac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)$

Solución: El argumento es $\dfrac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}$, o sea que $u=\dfrac{3}{\sqrt[4]{6x-1}}$. Aplicando la fórmula (14):

$$\frac{dy}{dx}=-\,cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\,cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\frac{d}{dx}\left[3\left(6x^5-1\right)^{-1/4}\right]$$

La derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\left[-\frac{3}{4}\left(6x^5-1\right)^{-5/4}\frac{d}{dx}\left(6x^5-1\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\left[\frac{-3\left(30x^4\right)}{4\left(6x^5-1\right)^{5/4}}\right]$$

Finalmente ordenando conforme a las reglas de escritura matemática

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{90x^4}{4\left(6x^5-1\right)^{5/4}}\cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)\csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5-1}}\right)}$$

Ejemplo 7: Hallar la derivada de $y = sen\left(4x^2-4x+7\right)^5$

Solución: El argumento es $(4x^2 - 4x + 7)^5$, por lo que $u = (4x^2 - 4x + 7)^5$. Empleando la fórmula (9):

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(4x^2-4x+7\right)^5\frac{d}{dx}\left(4x^2-4x+7\right)^5$$

La derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(4x^2-4x+7\right)\left[\underbrace{5}_{n}\underbrace{\left(4x^2-4x+7\right)}_{u}{}^{\underbrace{4}_{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(4x^2-4x+7\right)}_{\frac{d}{dx}u}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = cos\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5 \left[5\left(4x^2 - 4x + 7\right)^4 (8x - 4)\right]$$

finalmente, ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 5\left(4x^2 - 4x + 7\right)^4 (8x - 4) cos\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5}$$

EJEMPLOS CON POTENCIAS

Ejemplo 8: Hallar la derivada de $y = cos^4 5x$

Solución: Como la función $y = cos^4 5x$ es lo mismo que $y = \left(cos\, 5x\right)^4$, tiene la forma de u^n, en donde $u = cos\ 5x$ y $n = 4$. Entonces aplicando la fórmula (6) correspondiente a u^n de la página 69 se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{4}_{n}\ \underbrace{(cos\ 5x)}_{u}{}^{\underbrace{3}_{n\,-\,1}}\ \underbrace{\frac{d}{dx} cos\ 5x}_{\frac{d}{dx}u}$$

La derivada pendiente es de la forma $cos\ u$:

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(cos\ 5x\right)^3 \left[\underbrace{-\,sen\ 5x}_{-\ sen\ u}\ \underbrace{\frac{d}{dx} 5x}_{\frac{d}{dx}u}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\, cos^3\, 5x\left[-\, sen\; 5x\,(5)\right]$$

Finalmente, ordenando conforme a las reglas de escritura matemática se llega a

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\,20\, cos^3\, 5x\; sen\; 5x}$$

Ejemplo 9: Hallar la derivada de $y = 7x^3\, tan\left(5x^2 - 7\right)$

Solución: La función tiene la forma del producto uv, en donde $u = 7x^3$ y $v = tan\left(5x^2 - 7\right)$. Entonces aplicando la fórmula (7) del producto uv de la página 77:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{7x^3}_{u}\; \underbrace{\frac{d}{dx} tan\left(5x^2 - 7\right)}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{tan\left(5x^2 - 7\right)}_{v}\; \underbrace{\frac{d}{dx} 7x^3}_{\frac{du}{dx}}$$

La primera derivada pendiente es de la forma $tan\, u$, en donde $u = 5x^2 - 7$:

$$\frac{dy}{dx} = 7x^3\left[\underbrace{sec^2\left(5x^2 - 7\right)}_{sec^2 u}\; \underbrace{\frac{d}{dx}\left(5x^2 - 7\right)}_{\frac{d}{dx} u}\right] + tan\left(5x^2 - 7\right)\left[21x^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 7x^3\left[sec^2\left(5x^2 - 7\right)\left(10x\right)\right] + tan\left(5x^2 - 7\right)\left[21x^2\right]$$

Nótese que el factor $\left[21x^2\right]$ se escribió con un paréntesis de diferente forma al del argumento de la tangente para evitar confusiones y dejar claro que no pertenece al argumento. Finalmente, ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 70x^4\, sec^2\left(5x^2 - 7\right) + 21x^2\, tan\left(5x^2 - 7\right)}$$

Ejemplo 10: Derivar $y = \dfrac{sen^4 5x}{sec\, x^2}$

Solución: La función tiene la forma de un cociente, en donde $u = sen^4 5x$ y $v = sec\, x^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{sec\, x^2}^{v}\ \overbrace{\frac{d}{dx} sen^4 5x}^{\frac{du}{dx}} - \overbrace{sen^4 5x}^{u}\ \overbrace{\frac{d}{dx} sec\, x^2}^{\frac{dv}{dx}}}{\underbrace{\left(sec\, x^2\right)^2}_{v^2}}$$

La primera derivada pendiente o indicada es $\dfrac{d}{dx} sen^4 5x$, la cual se deriva con la fórmula de u^n (ver ejemplo 8), ya que $sen^4 5x = (sen\ 5x)^4$; en donde ahora por cambiar de fórmula

$u = sen\ 5x$ y $n = 4$, mientras que la segunda derivada pendiente es $\frac{d}{dx} sec\, x^2$, la cual es de la forma $sec\ v$, en donde $v = x^2$. Nótese que aunque la fórmula original está expresada en términos de la variable *u*, es decir,

$$\frac{d}{dx} sec\, u = tan\, u\ sec\, u \frac{du}{dx},$$

en este caso se está empleando la variable v, esto es

$$\frac{d}{dx} sec\, v = tan\, v\ sec\, v \frac{dv}{dx}$$

en virtud de que la variable *u* se utilizó en la primera derivada pendiente. Realizando las derivadas indicadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec\, x^2 \left[\overbrace{4}^{n} \overbrace{(sen\ 5x)}^{u}{}^{\overbrace{3}^{n\,-\,1}} \overbrace{\frac{d}{dx} sen\ 5x}^{\frac{du}{dx}} \right] - sen^4 5x \left[\overbrace{tan\, x^2}^{tan\ v} \overbrace{sec\, x^2}^{sec\ v} \overbrace{\frac{d}{dx} x^2}^{\frac{dv}{dx}} \right]}{sec^2\ x^2}$$

Como $\frac{d}{dx} sen\ u = cos\, u \frac{du}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec\, x^2 \left(4\, sen^3 5x\ cos\, 5x \frac{d}{dx} 5x \right) - sen^4 5x \left(tan\, x^2\ sec\, x^2 [2x] \right)}{sec^2\ x^2}$$

Finalmente, multiplicando y ordenando conforme a las reglas de escritura se llega a

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{20\,sec\,x^2\ sen^3 5x\ cos\,5x-2x\,sen^4 5x\,tan\,x^2\ sec\,x^2}{sec^2\ x^2}}$$

Ejemplo 11: Derivar $y = tan\ sen\ 4x$.

Solución: En este caso debe distinguirse en primer lugar que el argumento de la función trigonométrica *tangente* es a su vez la función trigonométrica *seno*; y que el argumento de este *seno* es $4x$. Significa que la función a derivar tiene la forma de $tan\ u$, en donde $u = sen\ 4x$.. Utilizando entonces la fórmula de derivación de la tangente se obtiene que

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{sec^2\ sen\ 4x}_{sec^2 u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\ sen\ 4x}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx}=sec^2\ sen\ 4x\left[\underbrace{cos\,4x}_{cos\ u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\,4x}_{\frac{du}{dx}}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=4\,sec^2\ sen\,4x\,cos\,4x$$

Como $cos\,4x$ no es argumento de la secante, para evitar confusiones debe escribirse dicho coseno por delante:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 4\cos 4x \sec^2 sen\ 4x}$$

EJERCICIO 6.1

Hallar la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

1) $y = sen\ 8x$

2) $y = \cos(2-6x)$

3) $y = \tan\left(x^2 - x\right)$

4) $y = \cot\left(x^2 + 6x\right)^4$

5) $y = \sec\sqrt{3x^5}$

6) $y = \csc\left(\dfrac{1}{x^7}\right)$

7) $y = sen\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

8) $y = \cos\left(\dfrac{3}{2x^8}\right)$

9) $y = \tan\sqrt[6]{(4x-5)}$

10) $y = \cot\left(\dfrac{5}{\sqrt{(3x-5)^7}}\right)$

11) $y = \sec\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$

12) $y = \csc\left(x^3 - x^2 + x - 6\right)$

13) $y = sen^4 2x$

14) $y = \cos^3 6x$

15) $y = tan^5 x^7$

16) $y = \sqrt{sec\,7x}$

17) $y = \sqrt{csc\left(x^2 - 5\right)}$

18) $y = \sqrt[4]{sen\left(x^2 - x\right)}$

19) $y = \dfrac{1}{\sqrt{cos\,6x^4}}$

20) $y = \sqrt[9]{cot\left(8 - 3x\right)}$

21) $y = cot\,x^3\ sec\,5x$

22) $y = x^7\ cot\left(4x - 9\right)$

23) $y = \left(5 - x\right) csc\left(\dfrac{1}{x}\right)$

24) $y = tan\left[3x\left(x^2 - 1\right)^7\right]$

25) $y = cos\left(\dfrac{2x}{3x - 1}\right)$

26) $y = \dfrac{sen\ 2x}{x^5}$

27) $y = \dfrac{x}{sec\left(1 - x\right)}$

28) $y = \dfrac{5}{\sqrt[4]{cot^6\ 7x}}$

29) $y = tan\ cos\,2x$

30) $y = csc\ sen\ x^5$

31) $y = \sqrt[5]{tan\left(2x - 3\right)^7}$

32) $y = \dfrac{cot\ x^2}{x^2}$