6 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

ÍNDICE PARTICULAR

6

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

6.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

La palabra ***ecuación*** viene del latín, de *aequatus* , participio pasivo de *aequare* : "*igualar, volver igual*". Una ecuación es una afirmación de igualdad entre dos expresiones matemáticas. Resolver la ecuación significa encontrar la o las condiciones requeridas o necesarias para que se cumpla la igualdad propuesta.

Así, cuando se establece que $3x^2 + 5x$ es igual a cero, en ese momento se ha creado una ecuación, pues hay una afirmación de igualdad entre dos expresiones, o sea $3x^2 + 5x = 0$ condicionada a ciertos valores de *x*. Otra cosa distinta es investigar qué se requiere para que realmente $3x^2 + 5x$ sea igual a cero; cuando se hace esa investigación se llega a que se requiere que la equis sea $x = 0$, o bien $x = -\frac{5}{3}$. Eso es resolver la ecuación anterior.

Una ecuación es una especie de "adivinanza numérica", o sea que se hace un planteamiento cuya respuesta debe ser un número. Por ejemplo: *¿Qué número elevado al cuadrado es igual al doble de ese número más veinticuatro*?. Es una adivinanza cuya respuesta es el número 6. La diferencia entre cualquier adivinanza con las *adivinanzas numéricas*, llamadas ecuaciones, es que para responder las primeras hay que atinarle a la respuesta, mientras que en las numéricas existen procedimientos que conducen certera e infaliblemente a la solución.

Así, en el caso anterior, se puede plantear que

$$x^2 = 2x + 24$$
$$x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$(x - 6)(x + 4) = 0$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}}$$

Entonces, una ecuación trigonométrica también va a ser una especie de "adivinanza numérica", solamente que relacionada con una función trigonométrica. Por ejemplo: *El seno de un ángulo más el coseno de ese mismo ángulo es igual a* 1.328926*, ¿Cuál es ese ángulo*? El alumno puede comprobar con su calculadora que la respuesta es 25º; pero evidentemente que esa respuesta no es posible encontrarla al tanteo. Debe existir un procedimiento matemático que lleve a la solución, el cual es el planteamiento de una ecuación trigonométrica:

$$sen\ x + cos\ x = 1.328926$$

Resolver ecuaciones como la anterior es el objetivo de este capítulo. Para su estudio conviene clasificar las ecuaciones trigonométricas y mencionar el método de solución que les corresponda. En cualquiera de los casos se llegará al final del procedimiento a una función trigonométrica inversa la cual tiene dos soluciones según se vio en el capítulo 3. Esto último es fundamental para llegar a las respuestas correctas.

6.2 DESPEJE DIRECTO

Las ecuaciones trigonométricas más sencillas son las que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el argumento. El argumento es el ángulo, que no necesariamente es x. Esto es importantísimo tenerlo presente para despejar correctamente.

Es fundamental recordar también que todas las funciones trigonométricas inversas tienen dos soluciones, según lo visto en las páginas 79 a 86 del capítulo 4.

Ejemplo 1: $cos\ 2x = 0.642787609$

Solución: En este caso, la función trigonométrica ya está despejada. El argumento, o sea el ángulo, es $2x$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\begin{aligned} cos\ 2x &= 0.642787609 \\ 2x &= arc\ cos\ 0.642787609 \end{aligned}$$

Como el coseno es positivo en el primero y cuarto cuadrantes, tiene dos soluciones (ver capítulo 4) que son:

Primer cuadrante:
$2x_1 = 50$
$x_1 = \dfrac{50}{2}$
$x_1 = 25$

Segundo cuadrante:
$2x_2 = 360 - 50$
$2x_2 = 310$
$x_2 = \dfrac{310}{2}$
$x_2 = 155$

Las soluciones de la ecuación son

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 25 \\ x_2 &= 155 \end{aligned}}$$

¡Cuidado!: Al afirmar que existen dos soluciones en la ecuación trigonométrica, se refiere a que el *arco coseno de* 0.642787609 es 50 grados y también 310 grados los cuales son iguales al argumento $2x$. No debe confundirse entonces entre que esos valores sean iguales a x a que sean iguales al argumento, en este caso a $2x$. La realidad es que esos valores deben ser iguales siempre al argumento.

Ejemplo 2: $5 + \tan 6x = 3.267949192$

Solución: El argumento. o sea el ángulo es $6x$ en este caso. Despejando primero la función trigonométrica:

$$\tan 6x = 3.267949192 - 5$$
$$\tan 6x = - 1.732050808$$

Aplicando la función inversa para despejar el argumento $6x$ (no x), se obtiene:

$$6x = \arctan (-1.732050808)$$

que tiene dos soluciones, las cuales están en el segundo y cuarto cuadrantes ya que en dichos cuadrantes la tangente es negativa. Conforme a lo visto en la página 81, se saca primero la tangente inversa al valor absoluto para obtener que *arc tan* 1.732050808 = 60. Entonces las dos soluciones son:

Segundo cuadrante:
$6x_1 = 180 - 60$
$6x_1 = 120$
$x_1 = \dfrac{120}{6}$
$x_1 = 20$

Cuarto cuadrante:
$6x_2 = 360 - 60$
$6x_2 = 300$
$x_2 = \dfrac{300}{6}$
$x_2 = 50$

Ejemplo 3: $sen\ (2x + 8) = - 0.93969262$

Solución: En este caso la función trigonométrica ya está despejada. El ángulo, o sea el argumento es $(2x + 8)$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$sen\ (2x + 8) = - 0.93969262$$
$$(2x + 8) = arc\ sen\ (- 0.93969262)$$

tiene dos soluciones, las cuales están en el tercero y cuarto cuadrantes, ya que allí el seno es negativo. Conforme a lo visto en la página 81, se saca primero *arco seno* al valor absoluto para obtener que *arc sen* 0.93969262 = 70. Entonces, tomando en cuenta que el valor anterior (70) es igual al argumento, las dos soluciones son:

Tercer cuadrante:
$2x_1 + 8 = 180 + 70$
$2x_1 + 8 = 250$
$2x_1 = 242$
$x_1 = \dfrac{242}{2}$
$x_1 = 121$

Cuarto cuadrante:
$2x_2 + 8 = 360 - 70$
$2x_2 + 8 = 290$
$2x_2 = 282$
$x_2 = \dfrac{282}{2}$
$x_2 = 141$

Las soluciones de la ecuación son

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 121 \\ x_2 &= 141 \end{aligned}}$$

Ejemplo 4: $\cos\,(x^2 + 10) = 0.275637355$

Solución: En este caso el ángulo, o sea el argumento es $(x^2 + 10)$. Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\cos\,(x^2 + 10) = 0.275637355$$
$$x^2 + 10 = \arccos 0.275637355$$

como el *arco coseno de* 0.275637355 es igual a 74, las dos soluciones, las cuales están en el primero y cuarto cuadrantes ya que allí el coseno es positivo, son:

Primer cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$x^2 + 10 = 74$	$x^2 + 10 = 360 - 74$
$x^2 = 74 - 10$	$x^2 + 10 = 286$
$x^2 = 64$	$x^2 = 286 - 10$
$x = \pm\sqrt{64}$	$x^2 = 276$
$x_1 = 8$	$x_3 = +\sqrt{276}$
$x_2 = -8$	$x_4 = -\sqrt{276}$

Las soluciones de la ecuación son

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -8 \\ x_2 &= \sqrt{276} \end{aligned}}$$

EJERCICIO 6.1

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

1) $sen\ 3x = 0.707106781$
2) $cos\ 4x = 0.882947592$
3) $tan\ 8x = 5.671281820$
4) $sen\ 10x = 0.766044444$
5) $cos\ 2x = -\ 0.913545457$
6) $tan\ 7x = 1.482560969$
7) $sen\ (3x + 2) = -\ 0.529919264$
8) $cos\ (x - 7) = -\ 0.788010753$
9) $tan\ (5x + 7) = -\ 1.962610506$
10) $sen\ (9 - 2x) = -\ 0.087155742$
11) $cos\ 5x^2 = -\ 0.422618261$
12) $tan\ 3x^2 = -\ 3.077683537$
13) $sen\ (x^2 + 2) = 0.992546151$
14) $cos\ (x^2 - 50) = 0.069756473$
15) $tan\ (x + 70) = -\ 1.962610506$
16) $sen\ (49 - 2x) = -\ 0.087155742$
17) $cos\ 2x^2 = -\ 0.422618261$
18) $tan\ (75 - 3x^2) = -\ 3.077683537$
19) $sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0.5$
20) $cos\left(\frac{4}{3x}\right) = 0.5$

6.3 ECUACIONES DE LA FORMA: *m sen x = n cos x*

Las siguientes ecuaciones trigonométricas más sencillas de resolver son las que tienen la forma $m\,sen\,x = n\cos x$, donde *m* y *n* son números conocidos. Basta transformar la ecuación a la forma

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{n}{m}$$

dividiendo la ecuación original entre *m cos x* (lo que indebidamente se dice que "pasa a dividir el *coseno* y *m* al otro lado") y sustituir el cociente seno entre coseno por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 90. Luego simplemente se despeja la tangente aplicándole la función inversa y teniendo cuidado de localizar los dos valores que le corresponden por el signo de la función, conforme a lo visto en el capítulo 3.

Ejemplo 5: $4\ sen\ x = 3\ cos\ x$

Solución: En este caso, $m = 4$ y $n = 3$. La ecuación se puede escribir como:

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{3}{4}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 90, y como $\frac{3}{4} = 0.75$, se llega a que

$$\tan x = 0.75$$

aplicándole la función inversa:

$$x = arc\ tan\ 0.75 = 36.87$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva:

Primer cuadrante
$x_1 = 36.87$

Tercer cuadrante
$x_2 = 180 + 36.87$
$x_2 = 216.87$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 36.87$$
$$x_2 = 216.87$$

Ejemplo 6: $5\ sen\ x + 11\ cos\ x = 0$

Solución: Restando 11*cos x* en ambos lados (lo que indebidamente se dice que el 11*cos x* "pasa al otro lado a restar"), la ecuación queda en la forma *m sen x* = *n cos x*. Haciéndolo:

$$5\ sen\ x = -\ 11\ cos\ x$$

En este caso, $m = 5$ y $n = -11$. Dividiendo toda la igualdad anterior entre 5*cos x* (lo que indebidamente se dice que el 5 y el *cos x* pasan al otro lado a dividir), se obtiene:

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} = -\frac{11}{5}$$

sustituyendo por la tangente, fórmula (7) de la página 90, y como $\frac{11}{5} = 2.2$, se llega a que

$$\tan x = -2.2$$

aplicándole la función inversa:

$$x = \arctan(-2.2)$$

la cual tiene dos soluciones, una en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que allí la tangente es negativa. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de (- 2.2), lo que da *arc tan* 2.2 = 65.556, se tiene que:

Segundo cuadrante
$x_1 = 180 - 65.556$
$x_1 = 114.443$

Cuarto cuadrante
$x_2 = 360 - 65.556$
$x_2 = 294.443$

Las soluciones de la ecuación son

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 114.443 \\ x_2 &= 294.443 \end{aligned}}$$

Ejemplo 7: $10 \, sen \, 4x - 5 \cos 4x = 0$

Solución: Sumando 5 *cos* 4*x* en ambos lados (lo que incorrectamente se dice que - 5 *cos* 4*x* pasa al otro lado a sumar), la ecuación queda en la forma $m \, sen \, x = n \cos x$. Haciéndolo:

$$10 \, sen \, 4x = 5 \cos 4x$$

En este caso, $m = 10$ y $n = 5$. Dividiendo toda la igualdad anterior entre 10 *cos* 4*x* (lo que erróneamente se dice que pasan a dividir) , se obtiene:

$$\frac{sen \, 4x}{\cos 4x} = \frac{5}{10}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 90, y como $\frac{5}{10} = 0.5$, se llega a que

$$\tan 4x = 0.5$$

aplicándole la función inversa:

$$4x = \arc \tan 0.5$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de 0.5, lo que da *arc tan* 0.5 = 26.565, se tiene que:

Primer cuadrante
$4x_1 = 26.565$
$x_1 = \dfrac{26.565}{4}$
$x_1 = 6.641$

Tercer cuadrante
$4x_2 = 180 + 26.565$
$4x_2 = 206.565$
$x_2 = \dfrac{206.565}{4}$
$x_2 = 51.641$

Las soluciones de la ecuación son

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 6.641 \\ x_2 = 51.641 \end{array}}$$

EJERCICIO 6.2

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

1) $2 \operatorname{sen} x = \cos x$
2) $5 \cos x = 6 \operatorname{sen} x$
3) $\operatorname{sen} 9x - \cos 9x = 0$
4) $12 \operatorname{sen} 10x = 4 \cos 10x$
5) $\cos 2x - 7 \operatorname{sen} 2x = 0$
6) $8 \operatorname{sen} (2x - 2) = 4 \cos (2x - 2)$
7) $\operatorname{sen} (3x + 2) = 5 \cos (3x + 2)$
8) $\cos (x - 7) - 3 \operatorname{sen} (x - 7) = 0$
9) $20 \operatorname{sen} (5x + 7) = - 5 \cos (5x + 7)$
10) $12 \operatorname{sen} (9 - 2x) = 6 \cos (9 - 2x)$