CAPÍTULO 5

FÓRMULAS DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

5.1 FÓRMULA DE LA RAÍZ CUADRADA

Antes de practicar las fórmulas (7) y (8) del producto y del cociente, conviene deducir una fórmula para la raíz cuadrada, en virtud de que en muchas funciones aparece la necesidad de derivarlas.

Si $y = \sqrt{u}$, para derivarla debe hacerse primero $y = u^{1/2}$ y entonces emplear la fórmula de la potencia u^n. Haciéndolo se llega a que

$$y = u^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{n} \underbrace{u}_{u}^{\overbrace{\frac{1}{2} - 1}^{n\,-\,1}} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}}$$

La derivada de una raíz cuadrada es la derivada del subradical (lo que está adentro del radical) entre dos veces el radical original.

Por ejemplo, si $y = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$, su derivada se puede obtener rápidamente empleando la fórmula anterior, colocando en el numerador la derivada de x^2 - $3x + 7$ (la derivada del subradical), o sea $2x$ - 3, y en el denominador dos veces el radical original, esto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 7}}$$

Debe tenerse cuidado de que esta fórmula solamente puede emplearse para raíces cuadradas, no para raíces cúbicas o de otro orden.

5.2 FÓRMULA DEL PRODUCTO

$$\text{(7)} \qquad \frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad \text{fórmula del producto}$$

en donde u representa a uno de los factores y v representa al otro factor.

Ejemplo 1: Hallar la derivada de $y = \left(x^2 + 5x - 11\right)\left(x^3 - 7x^2 - 9\right)$

Solución: Empleando la fórmula (7) del producto, en donde u representa el primer factor y v representa el segundo factor, o sea

$$u = x^2 + 5x - 11$$
$$v = x^3 - 7x^2 - 9$$

entonces empleando dicha fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(x^2 + 5x - 11\right)}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^3 - 7x^2 - 9\right)}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{\left(x^3 - 7x^2 - 9\right)}_{v}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2 + 5x - 11\right)}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left(x^2 + 5x - 11\right)\left(3x^2 - 14x\right) + \left(x^3 - 7x^2 - 9\right)\left(2x + 5\right)}$$

Ejemplo 2: Calcular la derivada de $y = \left(x^2 - 5x - 9\right)\sqrt{5x+4}$

Solución: En este caso los dos factores son

$$u = x^2 - 5x - 9$$
$$v = \sqrt{5x+4} = \left(5x+4\right)^{1/2}$$

Empleando la fórmula (7), página 77, del producto, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(x^2 - 5x - 9\right)}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(5x+4\right)^{1/2}}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{\left(5x+4\right)^{1/2}}_{v} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2 - 5x - 9\right)}_{\frac{du}{dx}}$$

Para derivar $(5x+4)^{1/2}$ debe emplearse la fórmula (6) de u^n de la potencia, página 69:

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2 - 5x - 9\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(5x+4\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(5x+4\right)\right] + \left(5x+4\right)^{1/2}\left(2x-5\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2 - 5x - 9\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(5x+4\right)^{-1/2}\left(5\right)\right] + \left(5x+4\right)^{1/2}\left(2x-5\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\left(x^2 - 5x - 9\right)}{2\left(5x+4\right)^{1/2}} + \left(5x+4\right)^{1/2}\left(2x-5\right)$$

o bien

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5\left(x^2 - 5x - 9\right)}{2\sqrt{5x+4}} + \left(2x-5\right)\sqrt{5x+4}}$$

Ejemplo 3: Hallar la derivada de $y = \left(7x^2 - 3\right)^8 \left(9 - 3x\right)^5$

Solución: En este caso los dos factores son

$$u = (7x^2 - 3)^8$$
$$v = (9 - 3x)^5$$

Empleando la fórmula (7), página 77, del producto, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(7x^2 - 3\right)^8}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(9 - 3x\right)^5}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{\left(9 - 3x\right)^5}_{v} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(7x^2 - 3\right)^8}_{\frac{du}{dx}}$$

Para calcular las derivadas de $(9 - 3x)^5$ y de $(7x^2 - 3)^8$ debe emplearse en ambas la fórmula (6) de u^n de la potencia de la página 69:

$$\frac{dy}{dx} = \left(7x^2 - 3\right)^8 \left[5\left(9 - 3x\right)^4 \frac{d}{dx}\left(9 - 3x\right)\right] + \left(9 - 3x\right)^5 \left[8\left(7x^2 - 3\right)^7 \frac{d}{dx}\left(7x^2 - 3\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(7x^2 - 3\right)^8 \left[5\left(9 - 3x\right)^4 \left(-3\right)\right] + \left(9 - 3x\right)^5 \left[8\left(7x^2 - 3\right)^7 \left(14x\right)\right]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -15\left(7x^2-3\right)^8\left(9-3x\right)^4 + 112x\left(9-3x\right)^5\left(7x^2-3\right)^7}$$

5.3 FÓRMULA DEL COCIENTE

(8) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$ fórmula del cociente

en donde u representa al numerador y v representa al denominador.

Ejemplo 4: Hallar la derivada de $y = \dfrac{6x+7}{8x-9}$

Solución: Cuando la función a derivar es una fracción, debe emplearse la fórmula (8) del cociente, en donde u simboliza el numerador y v simboliza el denominador. En este caso:

$u = 6x + 7$
$v = 8x - 9$

Recordando la fórmula (8) del cociente y sustituyendo después:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\dfrac{du}{dx} - u\,\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(8x-9\right)\dfrac{d}{dx}\left(6x+7\right) - \left(6x+7\right)\dfrac{d}{dx}\left(8x-9\right)}{\left(8x-9\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(8x-9)(6)-(6x+7)(8)}{(8x-9)^2}$$

En este caso, aunque no es indispensable, conviene realizar las multiplicaciones indicadas en el numerador, pues así habrá reducción de términos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x-54-48x-56}{(8x-9)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-110}{(8x-9)^2}}$$

Ejemplo 5: Derivar $y = \dfrac{(5x^2-7x-9)^4}{9x-1}$

Solución: Cuando la función a derivar es una fracción, debe emplearse la fórmula (8) del cociente, en donde u simboliza el numerador y v simboliza el denominador. En este caso:

$u = (5x^2 - 7x - 9)^4$
$v = 9x - 1$

Recordando la fórmula (8) del cociente y sustituyendo después:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x-1)\frac{d}{dx}\left(5x^2-7x-9\right)^4 - \left(5x^2-7x-9\right)^4 \frac{d}{dx}(9x-1)}{(9x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x-1)\left[4\left(5x^2-7x-9\right)^3 \frac{d}{dx}\left(5x^2-7x-9\right)\right] - \left(5x^2-7x-9\right)^4 (9)}{(9x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x-1)\left[4\left(5x^2-7x-9\right)^3 (20x-7)\right] - 9\left(5x^2-7x-9\right)^4}{(9x-1)^2}$$

Y ordenando conforme a las reglas de escritura para cada término: Primero se escribe el signo; después el coeficiente numérico; a continuación los factores monomios (letras solas) en orden alfabético; luego los factores polinomios y en seguida los radicales:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{4(9x-1)\left(5x^2-7x-9\right)^3 (20x-7) - 9\left(5x^2-7x-9\right)^4}{(9x-1)^2}}$$

Ejemplo 6: Calcular la derivada del ejemplo anterior utilizando la fórmula del producto.

Solución: La función original $y = \dfrac{\left(5x^4-7x-9\right)^4}{9x-1}$ que tiene la forma de un cociente puede escribirse como $y = \left(5x^4-7x-9\right)^4 (9x-1)^{-1}$ para que adquiera la forma de un producto. De esta manera, $u = (5x^4 - 7x - 9)^4$ y $v = (9x - 1)^{-1}$.

Entonces, recordando la fórmula del producto:

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(5x^4 - 7x - 9\right)^4}_{u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(9x-1\right)^{-1}}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{\left(9x-1\right)^{-1}}_{v}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(5x^4 - 7x - 9\right)^4}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(5x^4 - 7x - 9\right)^4\left[-1\left(9x-1\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(9x-1\right)\right] + $$

$$+\left(9x-1\right)^{-1}\left[4\left(5x^4 - 7x - 9\right)^3\frac{d}{dx}\left(5x^4 - 7x - 9\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(5x^4 - 7x - 9\right)^4\left[-1\left(9x-1\right)^{-2}(9)\right] + $$

$$+\left(9x-1\right)^{-1}\left[4\left(5x^4 - 7x - 9\right)^3\left(20x^3 - 7\right)\right]$$

Finalmente ordenando de acuerdo con las reglas de escritura:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9\left(5x^4 - 7x - 9\right)^4}{\left(9x-1\right)^2} + \frac{4\left(5x^4 - 7x - 9\right)^3\left(20x^3 - 7\right)}{9x-1}$$

Para verificar que es el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo anterior cuando se derivó con la fórmula del cociente, debe efectuarse la suma de fracciones de este último resultado sacando común denominador:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-9\left(5x^4-7x-9\right)^4+\left(9x-1\right)\left[4\left(5x^4-7x-9\right)^3\left(20x^3-7\right)\right]}{\left(9x-1\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{4\left(5x^4-7x-9\right)^3\left(20x^3-7\right)\left(9x-1\right)-9\left(5x^4-7x-9\right)^4}{\left(9x-1\right)^2}}$$

EJERCICIO 5.1

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

PRODUCTOS:

1) $y=\left(6x^2+11x-9\right)\left(5x^2-13x+21\right)$

2) $y=\left(x^3-7x+3\right)\left(5x^4-x^2+11\right)$

3) $y=\left(7x^5+7x^4\right)\left(4x^2-4x+17\right)$

4) $y=\left(6x^6-2x^3+8x\right)\left(9x^3+7x\right)$

5) $y=\left(6-18x-x^2\right)\left(x^2+19x-5\right)$

6) $y=\left(\dfrac{3x^7}{8}-\dfrac{2x^5}{7}\right)\left(\dfrac{2x^3}{11}+\dfrac{9x}{19}\right)$

7) $y=\left(3x^7-6x^2+6\right)\sqrt{4x-11}$

8) $y=4x^2\sqrt{\left(x^2+2x-7\right)^5}$

9) $y=x^5\sqrt{4x+7}$

10) $y=3x^2\sqrt[3]{\left(2x^3+3x^2-6x-9\right)^7}$

11) $y=\left(6x-5\right)\sqrt{\left(5-8x\right)^{11}}$

12) $y=\left(1-x^2\right)^5\sqrt[7]{\left(1+x^2\right)^4}$

13) $y=5x^7\sqrt[9]{\left(5-3x^5\right)^8}$

14) $y=\left(4x+7\right)^5\left(x^2-5x+8\right)^7$

COCIENTES:

15) $y=\dfrac{7x+11}{x^5-x}$

16) $y=\dfrac{5x-11}{5x+11}$

17) $y=\dfrac{9-x^2}{5x^3+x}$

18) $y=\dfrac{x}{7x^5-6}$

19) $y = \dfrac{3x^4 + x - 7}{x}$

20) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

21) $y = \dfrac{6x}{(6x - 7)^8}$

22) $y = \dfrac{(2x + 3)^4}{5x^2}$

23) $y = \dfrac{(7x^3 - x^2)^5}{11x^3}$

24) $y = \dfrac{6x^2 + x}{(2x + 9)^7}$

25) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - 1}}$

26) $y = \dfrac{\sqrt{2x}}{x^2 + x}$

27) $y = \dfrac{x^7}{\sqrt[3]{2x + 1}}$

28) $y = \dfrac{(x^2 - 7x + 9)^4}{(x^2 + 7x - 9)^3}$