4 SUMA DE FRACCIONES

ÍNDICE PARTICULAR

CONCEPTO

Las cuatro operaciones fundamentales, suma, resta, multiplicación y división, con fracciones algebraicas se realizan bajo los mismos principios que en la aritmética se utilizan, o sea, para la suma y resta, sacando común denominador; para la multiplicación, multiplicando numeradores con numeradores y denominadores con denominadores; y para la división, multiplicando "en cruz".

Por esta razón, para el estudio de cada una de estas operaciones con fracciones algebraicas, se hará un recordatorio del proceso respectivo que se emplea en la aritmética, para que el alumno traslade cada uno de los procesos aritméticos a los algebraicos, respetando simplemente las reglas del álgebra ya conocidas.

SUMA ARITMÉTICA

La suma de fracciones está basada en la ley fundamental de la suma que dice que *solamente cosas iguales se pueden sumar y el resultado debe ser de esas mismas cosas*. O sea que cosas diferentes no se pueden sumar. Es de sentido común que no se pueden sumar cuadernos más piojos. Además, que si se suman plumas más plumas el resultado son plumas, no camiones.

Por esa razón, de entrada no se puede sumar un medio más un tercio porque son cosas diferentes: la primera son mitades y la otra son terceras partes, que al final de cuentas son cosas diferentes. Para poder efectuar esta suma, la aritmética hace un truco muy simple para reducir ambas fracciones a "cosas iguales" (fracciones equivalentes).

Se sabe que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{3}{6}}$, y por otra parte $\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{6}}$, de manera que sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (cosas diferentes) es lo mismo que sumar $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ (ya cosas iguales).

El proceso conocido como "sacar común denominador" es un procedimiento mecanizado para reducir las fracciones que se desean sumar a fracciones equivalentes; en otras palabras, es convertir cosas diferentes que no se pueden sumar a cosas iguales que ya se puedan sumar.

Cuando se tienen dos fracciones como las anteriores $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, entre ellas hay un número infinito de comunes denominadores, como son, por ejemplo, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, etc. Pero de todos ellos hay uno que es el más pequeño, el 6, por lo que a éste se le llama *mínimo común denominador*.

Se procura entonces obtener el mínimo común denominador, en vez de cualquier otro común denominador, solamente porque al trabajar con cantidades más pequeñas el trabajo se minimiza, pero no porque sea falso ni incorrecto. Es decir, se podría hacer la suma de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{12}{24}+\frac{8}{24}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{6}{\cancel{24}}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

lo cual es verdadero, solamente que es más complicado que haciéndolo con el mínimo común denominador, el 6:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Para facilitar el proceso, en vez de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$ se acostumbra escribirlo así: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}$

Un común denominador es al final de cuentas un múltiplo de todos los denominadores, por lo que se trata de un común múltiplo. Si se refiere al mínimo común denominador entonces se habla del mínimo común múltiplo (se abrevia m.c.m.) de todos esos denominadores.

COMÚN DENOMINADOR: REGLA ARITMÉTICA

Para sacar el mínimo común denominador de fracciones aritméticas (o mínimo común múltiplo de todos los denominadores):

- *Cada denominador se factoriza en sus factores primos;*
- *el mínimo común denominador se obtiene multiplicando todos los factores primos diferentes que hayan aparecido, con su máximo exponente.*

Ejemplo 1: Obtener el mínimo común denominador de las fracciones $\frac{5}{24}+\frac{17}{60}+\frac{13}{225}$

Solución:
* Los factores primos de 24 son $2^3 \times 3$.
* Los factores primos de 60 son $2^2 \times 3 \times 5$.
* Los factores primos de 225 son $3^2 \times 5^2$.
* Los factores diferentes, con su máximo exponente, que aparecieron son 2^3, 3^2 y 5^2
* El mínimo común denominador es $2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$.

Ejemplo 2: Obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 8, 12 y 18.

Solución:
* Los factores primos de 8 son 2^3.
* Los factores primos de 12 son $2^2 \times 3$.
* Los factores primos de 18 son 2×3^2.
* Los factores diferentes, con su máximo exponente, que aparecieron son 2^3 y 3^2
* El mínimo común múltiplo (m.c.m.) es $2^3 \times 3^2 = 72$.

REGLA ALGEBRAICA

Por lo que se dijo en la página anterior, la suma con fracciones algebraicas tiene el mismo principio que se emplea en la aritmética, o sea que se puede trasladar la regla, respetando simplemente las reglas del álgebra ya conocidas.

De manera que para sacar el mínimo común denominador de fracciones algebraicas (que es lo mismo que el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de todos los denominadores), por translación de la regla aritmética se obtiene la siguiente regla algebraica:

Para sacar el mínimo común denominador de fracciones algebraicas

➠ ***Cada denominador se factoriza (factorización total);***

➠ ***El mínimo común denominador se obtiene multiplicando todos los factores diferentes que hayan aparecido, con su máximo exponente.***

Ejemplo 3: Obtener el mínimo común denominador de las fracciones $\dfrac{5}{2a^4} + \dfrac{7}{6ab^2}$

Solución:
* Los factores de $2a^4$ (primer denominador) son $2 \times a^4$.
* Los factores de $6ab^2$ (segundo denominador) son $2 \times 3 \times a \times b^2$.
* Los factores diferentes con su máximo exponente que aparecieron son 2, 3, a^4 y b^2
* El mínimo común denominador es $2 \times 3 \times a^4 \times b^2 = 6a^4b^2$.

Ejemplo 4: Obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de $8abc$, $6b^3$ y $9a^2$.

Solución:

* Los factores de $8abc$ son $2^3 \times a \times b \times c$.
* Los factores de $6b^3$ son $2 \times 3 \times b^3$.
* Los factores de $9a^2$ son $3^2 \times a^2$.
* Los factores diferentes con su máximo exponente que aparecieron son 2^3, 3^2, a^2, b^3 y c.
* El mínimo común múltiplo (m.c.m.) es $2^3 \times 3^2 \times a^2 \times b^3 \times c = 72a^2b^3c$.

EJERCICIO 4.1

Obtener el m.c.m. de las siguientes cantidades:

1)	$4a^2$; $3ab^3$	2)	ab^3; $5a^3c$	3)	$14a^3c^2$; $21b^2c^2$
4)	$6a$; $8b$; $27c$	5)	$10a^2$; $25ab^2$; $2a^2b^2$	6)	$63a^4c^2$; $49a^2b^3$; ab^6
7)	$125a^3$; $10ab$; $4a^2b^3$	8)	$35b^2$; $25a^3bc^2$; $7a^2c^4$	9)	$6a^4c$; $a^2b^2c^2$; $9ab^6c^3$
10)	$16b^2$; $2a^7b$; $a^5b^5c^5$	11)	$81c^4$; $6a$; $2a^3b^3c^2$	12)	$5ab^4$; $7a^4c$; $3x^2y^7$
13)	$7x^6$; $11c^3$; a^3b^6	14)	$27d^9$; $9a^8c^2$; a^5d^5	15)	$72y^2$; $27a^3x^3$; $4a^6y^7$

SUMA DE FRACCIONES: REGLA ARITMÉTICA

Para efectuar la suma de fracciones aritméticas:

- *Se obtiene el mínimo común denominador;*
- *Se divide ese mínimo común denominador entre el primer denominador y el resultado obtenido se multiplica por su numerador respectivo;*
- *Se repite el paso anterior con cada una de las fracciones a sumar;*
- *Se efectúa la suma del numerador obtenido.*

Es indispensable que el alumno no aprenda a sumar fracciones con la mal afamada regla de la cruz que les enseñan los malos profesores de matemáticas, pues aunque ciertamente se llega a un resultado correcto cuando son solamente dos fracciones las que se suman, dicha regla pierde todo sentido cuando se suman tras o más fracciones como se verá en los siguientes ejemplos que se van a estudiar.

$$\overset{=18}{}\qquad\qquad \overset{=4}{}$$

$$\underbrace{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{18+4}{24}=\frac{22}{24}$$

Ejemplo 5: Efectuar la suma de fracciones $\frac{5}{24}+\frac{17}{60}+\frac{13}{225}$

Solución: Aquí ya no tiene sentido la anterior regla de la cruz, por lo que debe efectuarse bajo la regla general, es decir, con el mínimo común denominador que es $2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$. Se escribe:

$$\frac{5}{24}+\frac{17}{60}+\frac{13}{225}=\frac{\qquad\qquad}{1800}$$

* Dividiendo ese mínimo común denominador entre el primer denominador resulta $1800 \div 24 = 75$

El 75 obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $75 \times 5 = 375$.

En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5}{24}+\frac{17}{60}+\frac{13}{225}=\frac{375+\qquad\qquad}{1800}$$

* Dividiendo el mínimo común denominador entre el segundo denominador resulta 1800 ÷ 60 = 30

  El 30 obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir 30 × 17 = 510. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5}{24} + \frac{17}{60} + \frac{13}{225} = \frac{375 + 510 \qquad}{1800}$$

* Dividiendo el mínimo común denominador entre el tercer denominador resulta 1800 ÷ 225 = 8

  El 8 obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir 8 × 13 = 104. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5}{24} + \frac{17}{60} + \frac{13}{225} = \frac{375 + 510 + 104}{1800}$$

* Efectuando la suma del numerador obtenido:

$$\frac{5}{24} + \frac{17}{60} + \frac{13}{225} = \frac{375 + 510 + 104}{1800} = \frac{989}{1800}$$

REGLA ALGEBRAICA

Por lo que se dijo en páginas anteriores, la suma con fracciones algebraicas tiene el mismo principio que se emplea en la aritmética, o sea que se puede trasladar la regla, respetando simplemente las reglas del álgebra ya conocidas.

Para efectuar la suma de fracciones algebraicas:

* ***Se obtiene el mínimo común denominador;***
* ***Se divide ese mínimo común denominador entre el primer denominador y el resultado obtenido se multiplica por su numerador respectivo;***
* ***Se repite el paso anterior con cada una de las fracciones a sumar;***
* ***Se efectúa la suma del numerador obtenido, si es que resultan términos semejantes.***

Ejemplo 6: Efectuar la suma de fracciones $\dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{7}{6ab}$

Solución: El mínimo común denominador de $4a^2$ y $6ab$ es $2^2 \times 3 \times a^2 \times b = 12a^2b$. Se escribe:

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{7}{6ab} = \frac{\qquad}{12a^2b}$$

* Dividiendo ese mínimo común denominador entre el primer denominador resulta

$$12a^2b \div 4a^2 = 3b.$$

El $3b$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $3b \times 5$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{7}{6ab} = \frac{5(3b)\qquad}{12a^2b}$$

* Dividiendo el mínimo común denominador entre el segundo denominador resulta

$$12a^2b \div 6ab = 2a.$$

El $2a$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $2a \times 7$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{7}{6ab} = \frac{5(3b) + 7(2a)}{12a^2b}$$

* Efectuando las multiplicaciones que quedaron indicadas en el nuevo numerador resulta

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{7}{6ab} = \frac{5(3b) + 7(2a)}{12a^2b}$$

$$= \frac{15b + 14a}{12a^2b}$$

* Como no aparecieron términos semejantes, no se puede efectuar la suma del numerador obtenido, de manera que la respuesta es lo escrito en el paso anterior, es decir:

$$\boxed{\frac{5}{4a^2}+\frac{7}{6ab}=\frac{15b+14a}{12a^2b}}$$

Ejemplo 7: Efectuar la suma de fracciones $\dfrac{2b+1}{8b^2}+\dfrac{5a^2+2}{6a^2b}$

Solución: El mínimo común denominador de $8b^2$ y $6a^2b$ es $2^3\times 3\times a^2\times b^2=24a^2b^2$. Se escribe:

$$\frac{2b+1}{8b^2}+\frac{5a^2+2}{6a^2b}=\frac{\qquad\qquad}{24a^2b^2}$$

* Dividiendo ese mínimo común denominador entre el primer denominador resulta

$$24a^2b^2\div 8b^2=3a^2.$$

El $3a^2$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $3a^2(2b+1)$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{2b+1}{8b^2}+\frac{5a^2+2}{6a^2b}=\frac{3a^2\left(2b+1\right)\qquad}{24a^2b^2}$$

* Dividiendo el mínimo común denominador entre el segundo denominador resulta

$$24a^2b^2\div 6a^2b=4b.$$

El $4b$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $4b(5a^2+2)$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{2b+1}{8b^2}+\frac{5a^2+2}{6a^2b}=\frac{3a^2\left(2b+1\right)+4b\left(5a^2+2\right)}{24a^2b^2}$$

* Efectuando las multiplicaciones que quedaron indicadas en el nuevo numerador resulta

$$\frac{2b+1}{8b^2}+\frac{5a^2+2}{6a^2b}=\frac{3a^2\left(2b+1\right)+4b\left(5a^2+2\right)}{24a^2b^2}$$

$$=\frac{6a^2b+3a^2+20a^2b+8b}{24a^2b^2}$$

* Finalmente, efectuando la suma de términos semejantes que aparecieron en el nuevo numerador, la respuesta es:

$$\boxed{\frac{2b+1}{8b^2}+\frac{5a^2+2}{6a^2b}=\frac{26a^2b+3a^2+8b}{24a^2b^2}}$$

Ejemplo 8: Efectuar la suma de fracciones $\dfrac{5a^2-3}{6a^3}+\dfrac{3b^2-b}{9ab^2}+\dfrac{ab+2a}{2a^2b}$

Solución:

* El mínimo común denominador de $6a^3$, $9ab^2$ y $2a^2b$ es $2\times 3^2\times a^3\times b^2 = 18a^3b^2$. Se escribe:

$$\frac{5a^2-3}{6a^3}+\frac{3b^2-b}{9ab^2}+\frac{ab+2a}{2a^2b}=\frac{\qquad\qquad}{18a^3b^2}$$

* Dividiendo ese mínimo común denominador entre el primer denominador resulta

$$18a^3b^2 \div 6a^3 = 3b^2.$$

El $3b^2$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $3b^2(5a^2 - 3)$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5a^2-3}{6a^3}+\frac{3b^2-b}{9ab^2}+\frac{ab+2a}{2a^2b}=\frac{3b^2\left(5a^2-3\right)\qquad\qquad}{18a^3b^2}$$

* Dividiendo el mínimo común denominador entre el segundo denominador resulta

$$18a^3b^2 \div 9ab^2 = 2a^2.$$

El $2a^2$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $2a^2(3b^2 - b)$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5a^2-3}{6a^3}+\frac{3b^2-b}{9ab^2}+\frac{ab+2a}{2a^2b}=\frac{3b^2\left(5a^2-3\right)+2a^2\left(3b^2-b\right)}{18a^3b^2}$$

* Dividiendo el mínimo común denominador entre el tercer denominador, resulta

$$18a^3b^2 \div 2a^2b = 9ab.$$

El $9ab$ obtenido se multiplica por su numerador respectivo, es decir $9ab(ab + 2a)$. En ese momento se lleva escrito

$$\frac{5a^2-3}{6a^3}+\frac{3b^2-b}{9ab^2}+\frac{ab+2a}{2a^2b}=\frac{3b^2\left(5a^2-3\right)+2a^2\left(3b^2-b\right)+9ab\left(ab+2a\right)}{18a^3b^2}$$

* Efectuando las multiplicaciones que quedaron indicadas en el nuevo numerador resulta

$$\frac{5a^2-3}{6a^3}+\frac{3b^2-b}{9ab^2}+\frac{ab+2a}{2a^2b}=\frac{3b^2\left(5a^2-3\right)+2a^2\left(3b^2-b\right)+9ab\left(ab+2a\right)}{18a^3b^2}$$

$$=\frac{15a^2b^2-9b^2+6a^2b^2-2a^2b+9a^2b^2+18a^2b}{18a^3b^2}$$

* Finalmente, efectuando la suma de términos semejantes que aparecieron en el nuevo numerador, la respuesta es:

$$\boxed{\frac{5a^2-3}{6a^3}+\frac{3b^2-b}{9ab^2}+\frac{ab+2a}{2a^2b}=\frac{30a^2b^2-9b^2+16a^2b}{18a^3b^2}}$$

EJERCICIO 4.2

Efectuar la suma de las siguientes fracciones:

1) $\dfrac{2a}{6a^3b}+\dfrac{5b}{9b^2}$

2) $\dfrac{a^2}{4b^3}+\dfrac{7b}{10a^2}$

3) $\dfrac{x^2}{4x^2y}+\dfrac{5y^3}{18y^4}$

4) $\dfrac{5c^2}{14ac^3}+\dfrac{7a^3}{21a^4c}$

5) $\dfrac{1-a}{2a^2}+\dfrac{5b^2+ax}{6ab^2x}$

6) $\dfrac{x^2-ab^2}{60b^2x^2}+\dfrac{2ab^3-3}{15ab^5}$

7) $\dfrac{b^4c^2+8b^3c}{25b^3c}+\dfrac{2a^2bc^3-9a^2b^2c^4}{35a^2bc^3}$

8) $\dfrac{5+xy^3}{72xy^3}+\dfrac{2ax^2-3}{6ax^2}$

9) $\dfrac{2a^3b^3+3a^2b}{18a^3b}+\dfrac{ab^3c^3+6}{12abc^3}+\dfrac{b^4c^2+1}{30b^2c^2}$

10) $\dfrac{3ax^2+y}{50x^2}+\dfrac{4axy^3+2y^2}{20xy^3}+\dfrac{2a^4+1}{10a^4xy}$

11) $\dfrac{3a^2b^2+3ab}{49ab^2}+\dfrac{2c^2+3c}{14bc^2}+\dfrac{2+3acd^2}{35cd^2}$

12) $\dfrac{a^2+2}{6a^2}+\dfrac{1-3ab}{9ab}+\dfrac{2b^2+5}{12b^2}$