CAPÍTULO 4

LA DERIVADA POR FÓRMULAS

4.1 FÓRMULAS

Obtener la derivada de cualquier función por alguno de los dos métodos vistos anteriormente, el de tabulaciones y el de incrementos, resulta una tarea muy engorrosa, por lo que es preferible tener fórmulas para su cálculo.

Para comprender el significado simbólico de las fórmulas, el estudiante debe recordar que el símbolo de un operador es el grafo o representación escrita con el que se hace alusión a la operación. Así por ejemplo, a continuación se muestran diferentes operadores conocidos:

$+$	operador suma
$\times$	operador multiplicación
$\div$	operador división
$\sqrt{}$	operador raíz cuadrada

De la misma manera, el operador derivada es $\dfrac{d}{dx}$. Así como en el operador suma, como en el de multiplicación y división, para que tenga sentido debe escribirse una cantidad antes y otra después, o bien, en el operador raíz cuadrada debe escribirse una cantidad adentro para indicar a qué cantidad se le está sacando raíz, en el operador derivada lo que se escribe a continuación de dicho operador es a lo que se le aplica la derivada, aunque a veces se escribe en el mismo numerador cuando es una expresión muy corta. Analícense los siguientes ejemplos del uso del operador derivada:

$$\frac{d}{dx}x$$

El operador derivada se está aplicando a x. Por ser una expresión muy corta se prefiere escribir la x en el numerador de la siguiente manera: $\frac{dx}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x-1}$$

El operador derivada se está aplicando a la raíz cuadrada $\sqrt{2x-1}$.

$$\frac{d}{dx}\left(3x^4+5x^3-8x^2+9x-11\right)$$

(El operador derivada está aplicado al polinomio).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-4}{6x^2-1}\right)$$

(El operador derivada está aplicado a la fracción).

$$\frac{d}{dx}sen\left(3x^2-2\right)$$

(El operador derivada está aplicado a la función trigonométrica seno).

$$\frac{d}{dx}\left(3x^5-1\right)^4$$

(El operador derivada está aplicado a todo el polinomio elevado a la cuarta potencia).

El estudio de la derivada a través de fórmulas se hará por bloques:

a) Fórmulas básicas.
b) Fórmulas generalizadas:
   b.1) Para funciones algebraicas:
      b.1.1) de la forma u^n (potencia),
      b.1.2) de la forma uv (producto),
      b.1.3) de la forma u/v (cociente).
   b.2) Para funciones trascendentes:
      b.2.1) funciones trigonométricas,
      b.2.2) funciones trigonométricas inversas,
      b.2.3) funciones logarítmicas y exponenciales.

4.2 FÓRMULAS BÁSICAS

(1) $$\frac{d}{dx}c = 0$$ (la derivada de una constante es cero)

(2) $$\frac{d}{dx}x = 1$$ (la derivada de x es 1)

(3) $$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

(4) $$\frac{d}{dx}(u + v + \ldots) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v + \ldots$$ (La derivada de una suma es la suma de las derivadas).

(5) $$\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$$ (La derivada de una constante por una función es la constante por el resultado de derivar la función. Se dice que la constante se saca de la derivación).

Ejemplo 1: Hallar la derivada de $y = x^6$.

Solución: Por la propiedad de las igualdades (lo que se haga de un lado debe hacerse del otro para que la igualdad se conserve), aplicando el operador derivada a ambos miembros:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^6$$

En el lado derecho, empleando la fórmula (3), donde $n = 6$:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{6}_{n}\, x^{\overbrace{6-1}^{n-1}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 6x^5}$$

Ejemplo 2: Hallar la derivada de $y = 5x^3$.

Solución: Por la propiedad de las igualdades (lo que se haga de un lado debe hacerse del otro para que la igualdad se conserve), aplicando el operador derivada a ambos miembros:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}5x^3$$

Empleando primero la fórmula (5) en el lado derecho de la igualdad anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{5}_{\overbrace{c}} \underbrace{\frac{d}{dx} x^3}_{\overbrace{\frac{d}{dx} u}}$$

Ahora utilizando la fórmula (3), donde $n = 3$:

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(3x^{3-1}\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 15x^2}$$

Obsérvese que ya en forma práctica, el 15 se obtiene de multiplicar el coeficiente 5 por el exponente de la x.

Ejemplo 3: Calcular la derivada de $y = 4x$.

Solución: Por la propiedad de las igualdades (lo que se haga de un lado debe hacerse del otro para que la igualdad se conserve), aplicando el operador derivada a ambos miembros:

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} 4x$$

Empleando primero en el lado derecho la fórmula (5):

$$\frac{dy}{dx} = 4 \frac{d}{dx} x$$

Ahora utilizando la fórmula (2):

$$\frac{dy}{dx} = 4(1)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 4}$$

Ejemplo 4: Derivar $y = x^2 + x + 9$.

Solución: Por la propiedad de las igualdades (lo que se haga de un lado debe hacerse del otro para que la igualdad se conserve), aplicando el operador derivada a ambos miembros:

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\left(x^2 + x + 9\right)$$

Empleando primero en el lado derecho la fórmula (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 9$$

En el lado derecho de la igualdad deben aplicarse las fórmulas (3), (2) y (1) respectivamente:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1 + 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2x + 1}$$

Ejemplo 5: Hallar la derivada de $y = 6x^3 - 7x^2 - 9x + 12$.

Solución: Como la derivada de una suma es la suma de las derivadas (fórmula 4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}6x^3 - \frac{d}{dx}7x^2 - \frac{d}{dx}9x + \frac{d}{dx}12$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 18x^2 - 14x - 9}$$

Ejemplo 6: Hallar la derivada de $y = 11x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 14x - 21$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}11x^4 - \frac{d}{dx}2x^3 + \frac{d}{dx}9x^2 + \frac{d}{dx}14x - \frac{d}{dx}21$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 44x^3 - 6x^2 + 18x + 14}$$

Ejemplo 7: Hallar la derivada de $y = \frac{3x^2}{5} + \frac{7x}{4}$

Solución: Tómese en cuenta que la función a derivar es lo mismo que

$$y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{4}x$$

y por lo tanto los coeficientes fraccionarios de las equis $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{4}$ son constantes. Así que al derivar se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}\frac{d}{dx}x^2 + \frac{7}{4}\frac{d}{dx}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}(2x) + \frac{7}{4}(1)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{5} + \frac{7}{4}}$$

Ejemplo 8: Hallar la derivada de $y = \frac{1}{x}$

Solución: En este caso, debe primero transformarse la expresión original, pasando la x al numerador, para lo cual debe recordar el alumno que cambia de signo el exponente. Lo que se obtiene de esta transformación sigue siendo todavía igual a ye, no a la derivada:

$$y = x^{-1}$$

Escrito así ya tiene la forma de la fórmula (3):

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(-1)}_{n} x^{\overbrace{(-1-1)}^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1\,x^{-2}$$

Como no deben escribirse exponentes negativos como resultado final, vuelve a regresarse la x al denominador para que le cambie el exponente a positivo:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}}$$

Nótese que se habla de exponentes negativos, no de cantidades negativas que es diferente, por lo que el menos uno del numerador se dejó intacto.

Ejemplo 9: Obtener la derivada de $y = \dfrac{3}{x^2}$

Solución: En este caso, debe primero transformarse la expresión original, pasando la x al numerador, parta lo cual debe recordar el alumno que cambia de signo el exponente. Lo que se obtiene de esta transformación sigue siendo todavía igual a ye, no a la derivada:

$$y = 3x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\underbrace{(-2)}_{n}\; x^{\overbrace{(-2-1)}^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -6x^{-3}$$

Como no deben escribirse exponentes negativos como resultado final, vuelve a regresarse la x al denominador para que le cambie el signo del exponente a positivo:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{x^3}}$$

Ejemplo 10: Hallar la derivada de $y = \sqrt{x}$

Solución: En este caso, debe primero transformarse la expresión original, escribiendo la x con exponente fraccionario. Debe recordar el alumno que el numerador es la potencia original de x y el denominador el índice del radical. Lo que se obtiene de esta transformación sigue siendo todavía igual a *ye*, no a la derivada:

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

De este manera ya tiene la forma de x^n, en donde $n = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{n} x^{\overbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Como no deben escribirse exponentes negativos como resultado final, debe pasarse la x al denominador para que le cambie el exponente a positivo:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}}$$

También se puede escribir como

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Ejemplo 11: Hallar la derivada de $y = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$

Solución: Como en los ejemplos anteriores, debe primero transformarse la expresión original, escribiendo la x con exponente fraccionario y luego pasándola al numerador. Debe recordar el alumno que cuando se escribe un exponente fraccionario, el numerador es la potencia original de x (en este ejemplo es 3) y el denominador el índice del radical (en este ejemplo es 4) y que al pasar todo el exponente fraccionario al numerador cambia su signo. Lo que se obtiene de esta transformación sigue siendo todavía igual a ye, no a la derivada:

$$y = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{3}{x^{\frac{3}{4}}} = 3x^{-3/4}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\underbrace{\left(-\frac{3}{4}\right)}_{n}x^{\overbrace{\left(-\frac{3}{4}-1\right)}^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}x^{-7/4}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-9}{4x^{7/4}}}$$

Ejemplo 12: Derivar $y = \dfrac{3}{7\sqrt[5]{x^2}}$

Solución: En este caso, es necesario primero reconocer que la constante es la fracción $\dfrac{3}{7}$, es decir, la función original se puede escribir también como $y = \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)$. Luego, escribiendo con exponente fraccionario y finalmente pasándolo al numerador se tiene que

$$y = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{x^{2/5}}\right)$$

$$y = \frac{3}{7}\left(x^{-2/5}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{7}\right)\underbrace{\left(-\frac{2}{5}\right)}_{n}\ x^{\overbrace{\left(-\frac{2}{5}-1\right)}^{n-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{35}x^{-7/5}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{35\,x^{7/5}}}$$

Ejemplo 13 Derivar $y = \sqrt[4]{x^9}$

Solución: Escribiendo la función con exponente fraccionario:

$$y = x^{9/4}$$

Que así ya es de la forma x^n. Derivando conforme a esa fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}x^{\frac{9}{4}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}x^{5/4}$$

o bien

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{9\sqrt[4]{x^5}}{4}}$$

EJERCICIO 4.1

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = x^9$

2) $y = x^{11}$

3) $y = 23$

4) $y = x - 5$

5) $y = 4x + \pi$

6) $y = 4x^2 - x - 6$

7) $y = 2x^3 + 7x^2 - 8x - 7$

8) $y = 5x^5 + 3x^2 - 6x - 6$

9) $y = 7x^4 - x^3 + 5x^2$

10) $y = \dfrac{3x^3}{4} - \dfrac{2x^2}{7} + 9x$

11) $y = \dfrac{2x^6}{3} + \dfrac{4x^5}{9} - \dfrac{1}{2}$

12) $y = \dfrac{9x^2}{2} - \dfrac{3x}{5} - 7$

13) $y = \dfrac{1}{x^4}$

14) $y = \dfrac{4}{x^8}$

15) $y = \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^3}$

16) $y = \dfrac{6}{3x^5} + \dfrac{2}{5x^2} - \dfrac{7}{9x}$

17) $y = \dfrac{2}{9x^5} - \dfrac{3}{7x^4} + \dfrac{6}{5x}$

18) $y = \dfrac{8}{x^5} - \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{7}{6x}$

19) $y = \sqrt[4]{x^5}$

20) $y = \sqrt[4]{x^9}$

21) $y = \sqrt[7]{x}$

22) $y = \sqrt[11]{x^2}$

23) $y = \dfrac{1}{\sqrt[8]{x^7}}$

24) $y = \dfrac{3}{\sqrt[7]{x^{10}}}$

25) $y = \dfrac{3}{8\sqrt[9]{x^7}}$

26) $y = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^2}}$

4.3 FÓRMULAS GENÉRICAS

El siguiente paso es trabajar con fórmulas generales, no particulares como lo fue en el apartado anterior. Fórmulas particulares se refiere a que en la fórmula anterior de x^n solamente la variable x se elevaba a una potencia n; pero puede darse el caso que sea un polinomio el elevado a la potencia n, como por ejemplo, $\left(x^3 - 5x + 11\right)^6$. La siguiente fórmula, llamada de la potencia, está dada en forma genérica al utilizar la notación de u para representar cualquier función elevada a la potencia n.

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 13: Hallar la derivada de $y = \left(5x^3 - 7\right)^8$

Solución: En este caso, si $u = 5x^3 - 7$, la función se convierte en $y = u^8$. Aplicando la fórmula (6):

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{8}_{n}\,\underbrace{\left(5x^3 - 7\right)}_{u}^{\underbrace{8-1}_{n-1}}\,\frac{d}{dx}\underbrace{\left(5x^3 - 7\right)}_{u}$$

Para derivar $\frac{d}{dx}\left(5x^3 - 7\right)$ se emplean las fórmulas básicas iniciales de la página 57.

$$\frac{dy}{dx} = 8\left(5x^3 - 7\right)^7\left(15x^2\right)$$

o bien

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 120x^2\left(5x^3 - 7\right)^7}$$

Ejemplo 14: Calcular la derivada de $y = \left(6x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 11\right)^4$

Solución: En este caso, si $u = 6x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 11$, la función se convierte en $y = u^4$. Aplicando la fórmula (6):

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{4}_{n}\underbrace{\left(6x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 11\right)}_{u}^{\underbrace{4-1}_{n-1}}\frac{d}{dx}\underbrace{\left(6x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 11\right)}_{u}$$

y efectuando la derivada indicada al final:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 4\left(6x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 11\right)^3\left(24x^3 + 6x^2 - 2x + 8\right)}$$

Ejemplo 15: Obtener la derivada de $y = \dfrac{1}{4x + 13}$

Solución: En éste y en los ejemplos sucesivos, deberán emplearse exponentes fraccionarios y/o negativos exactamente como se hizo en los ejemplos 8 a 12 de las páginas 58 a 62, para convertir la función a la forma u^n. Entonces

$$y = (4x + 13)^{-1}$$

y la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-1}_{n}\ \underbrace{(4x+13)}_{u}{}^{\underbrace{1-1}_{n-1}}\ \frac{d}{dx}\ \underbrace{(4x+13)}_{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1(4x+13)^{-2}(4)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{(4x+13)^2}}$$

Ejemplo 16: Hallar la derivada de $y = \sqrt{(9x^2 + 12x - 2)^5}$

Solución: Escribiendo la función con exponente fraccionario: $y = (9x^2 + 12x - 2)^{5/2}$. De esta manera ya se puede emplear la fórmula de la derivada de u^n:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{5}{2}}_{n}\ \underbrace{(9x^2+12x-2)}_{u}{}^{\underbrace{\frac{5}{2}-1}_{n-1}}\ \frac{d}{dx}\ \underbrace{(9x^2+12x-2)}_{u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}\left(9x^2 + 12x - 2\right)^{\frac{3}{2}}\left(18x + 12\right)}$$

Ejemplo 17: Derivar $y = \dfrac{14}{\sqrt[4]{\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)^7}}$

Solución: Escribiendo la función con exponente fraccionario:

$$y = \frac{14}{\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)^{7/4}} = 14\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)^{-7/4}$$

con lo que ya se puede emplear la fórmula de u^n:

$$\frac{dy}{dx} = 14\underbrace{\left(-\frac{7}{4}\right)}_{n}\underbrace{\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)}_{u}^{\underbrace{-\frac{7}{4}-1}_{n-1}}\frac{d}{dx}\underbrace{\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)}_{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{98}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)^{-\frac{11}{4}}\left(3x^2 - 18x + 8\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{49}{2}\left(x^3 - 9x^2 + 8x - 5\right)^{-\frac{11}{4}}\left(3x^2 - 18x + 8\right)}$$

Ejemplo 18: Hallar la derivada de $y = \dfrac{13}{\left(5x^3 + 5x^2 + 5x - 4\right)^6}$

Solución: Escribiendo la función con exponente negativo:

$$y = 13\left(5x^3 + 5x^2 + 5x - 4\right)^{-6}$$

con lo que ya se puede emplear la fórmula de u^n:

$$\frac{dy}{dx} = 13 \underbrace{(-6)}_{n} \underbrace{\left(5x^3 + 5x^2 + 5x - 4\right)}_{u}^{\overbrace{-6-1}^{n-1}} \frac{d}{dx} \underbrace{\left(5x^3 + 5x^2 + 5x - 4\right)}_{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = -78\left(5x^3 + 5x^2 + 5x - 4\right)^{-7}\left(15x^2 + 10x + 5\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-78\left(15x^2 + 10x + 5\right)}{\left(5x^3 + 5x^2 + 5x - 4\right)^7}}$$

EJERCICIO 4.2

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = \left(7x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 11x - 9\right)^7$

2) $y = \left(x^5 + x^2 - 19x - 11\right)^9$

3) $y = \left(4 - x - 6x^2 - x^3\right)^8$

4) $y = \left(9 - x - 9x^5 + x^6\right)^6$

5) $y = \sqrt{x^3 + 5x^2 + 9x - 1}$

6) $y = \sqrt{\left(x^2 + x + 2\right)^7}$

7) $y = \sqrt{\left(3x^2 - 4x - 4\right)^9}$

8) $y = \sqrt[5]{\left(7 - 5x^3\right)^6}$

9) $y = \sqrt[10]{\left(6 - x\right)^{11}}$

10) $y = \sqrt[7]{\left(8 - 3x - x^5\right)^4}$

11) $y = 12\ \sqrt[7]{\left(5x - x^3 - 7x^4\right)^8}$

12) $y = 7\ \sqrt[10]{\left(6x - 6x^2 - x^7\right)^9}$

13) $y = \dfrac{13}{x^2 + 8x + 11}$

14) $y = \dfrac{11}{\left(x - 9x^4\right)^5}$

15) $y = \dfrac{7}{\left(x^3 - x^2 + 7x\right)^5}$

16) $y = \dfrac{9}{5\left(3x^2 + 5x + 6\right)^8}$

17) $y = \dfrac{17}{5\ \sqrt[3]{\left(x^4 + x^2 - x\right)^7}}$

18) $y = \dfrac{9}{4\ \sqrt[3]{\left(x^3 - 11x^2 - 9x + 7\right)^8}}$

19) $y = \dfrac{8}{9\ \sqrt[3]{\left(9x^2 + 18x - 11\right)^{18}}}$

20) $y = \dfrac{12}{5\ \sqrt[9]{\left(6x - 12x^5\right)^{10}}}$