4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

ÍNDICE PARTICULAR

4

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

4.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

En Matemáticas para toda operación existe su inversa, lo cual puede interpretarse de la siguiente forma: inicialmente se está en un "origen"; al aplicarle una operación cualquiera se sale de ese origen para llegar a "otro punto" y si se desea retornar desde este punto final hasta el "origen" (el inicial), con la operación inversa se consigue.

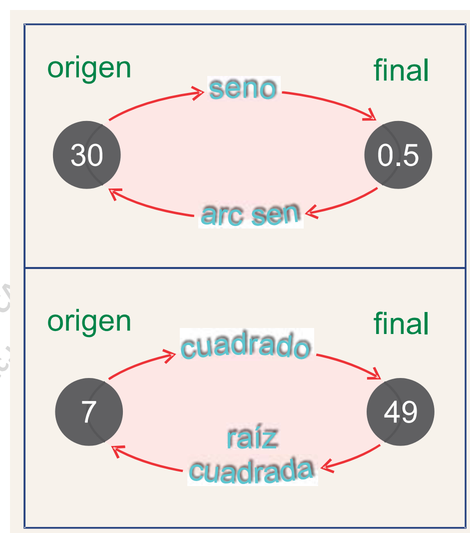

figura 4.1

En la figura 4.1 pueden verse dos ejemplos en forma gráfica de diferentes operaciones que llevan a otro número.

Por ejemplo, si el origen es el número 30 , o lo que es lo mismo, inicialmente se tiene el número 30, con la "operación seno" se traslada al número 0.5 . Para regresar del 0.5 al 30 inicial existe el camino de regreso, llamada *operación inversa* , en este caso el *seno inverso de* 0.5 ó bien *arco seno de* 0.5 con el que se cae nuevamente al 30 original.

De la misma forma, si el "origen" es, por ejemplo, el número 7, o lo que es lo mismo, inicialmente se tiene el número 7, con la operación "al cuadrado" se traslada al número 49. Para regresar del 49 al 7 inicial existe el camino de regreso, llamada *operación inversa*, en este caso *raíz cuadrada de* 49 con el que se cae nuevamente al número 7 original (figura 4.1).

El alumno debe en este momento realizar con su calculadora el siguiente ejercicio, pues aunque al principio le parezca demasiado elemental, en un instante se encontrará con algunas dificultades inesperadas, cuyas explicaciones lo conducirán a comprender el por qué las funciones trigonométricas inversas van siempre acompañadas de dos soluciones.

EJERCICIO 4.1

En cada uno de los siguientes ejercicios, a partir del origen (número inicial) con la calculadora realizar la traslación al punto final conforme a la operación señalada y anotarlo en la columna correspondiente. A continuación, localizar la operación inversa y nuevamente con la calculadora intentar regresar al origen. Anotar el resultado obtenido en la siguiente columna:

ORIGEN	OPERACIÓN	PUNTO FINAL	OPERACIÓN INVERSA	¿SE LLEGÓ AL ORIGEN?
13	8			
17	× 4			
12	- 9			
6	al cuadrado			
121	raíz cuadrada			
0.5	arco seno			
(- 12)	al cuadrado			
150	seno			
233	coseno			
207	tangente			

Es de esperarse que en los últimos cuatro ejercicios el alumno no haya regresado al origen con su calculadora. Al elevar (- 12) al cuadrado obtuvo como resultado 144, sin embargo, al aplicar la operación inversa *raíz cuadrada* , su calculadora lo regresó al + 12. Al aplicarle la función *seno* al número 150 obtuvo en pantalla 0.5; sin embargo, al aplicarle la función inversa *arc sen* su calculadora lo regresó al número 30 y no al 150 esperado. ¿A qué se debe? El asunto está en que cuando una misma operación aplicada a diferentes números lleva exactamente al mismo resultado, al aplicar la operación inversa la calculadora evidentemente solamente puede regresar a uno de ellos.

Por ejemplo, considerando la operación “elevar al cuadrado” , al aplicársela al número (+ 7) igual que al (- 7) se llega al mismo resultado 49. Verlo en la figura 4.2. De manera que al sacarle raíz cuadrada al 49, como no es posible obtener los dos números originales a la vez, la calculadora está diseñada para que entregue el positivo + 7. Sin embargo, por esa razón, rigurosamente en Matemáticas toda raíz cuadrada tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa, escrito ± 7 .

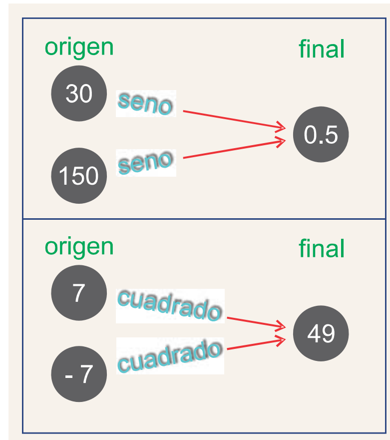

figura 4.2

Para el caso de la raíz cuadrada del 49 , aunque se acostumbre poner solamente la positiva, en rigor se tiene que $\sqrt{49} = \pm 7$.

Con todas las funciones trigonométricas sucede lo mismo. En el caso de la figura 4.2, el seno de 150 es igual al seno de 30, conforme a las fórmulas de reducción vistas anteriormente. Es decir que

$$sen\ 150 = sen\ 30 = 0.5$$

de manera que al sacar *arco seno* (o seno inverso) de 0.5, la calculadora solamente puede regresar a uno de esos dos valores. Y está diseñada para entregar los valores reducidos, es decir, los que corresponden al primer cuadrante. Por eso, cuando se saca en la calculadora *sen* 150, da como resultado 0.5, y al aplicarle el inverso, en vez de regresar al 150, se obtiene en pantalla 30.

Ahora bien, como en los cuatro cuadrantes todas las funciones son dos positivas y dos negativas, ver tabla de signos de la página 60, se puede entonces formular una primera conclusión muy importante:

Toda función trigonométrica inversa tiene dos soluciones.

Para localizar las dos soluciones debe pensarse en algo así como un proceso inverso a la reducción de funciones de ángulos mayores de 90º que se analizó de las páginas 61 a la 64. Esto es:

Para calcular una función trigonométrica inversa:

a) Se localizan los dos cuadrantes en los que la función trigonométrica tenga ese signo con el que aparece en el enunciado;

b) se obtiene el valor del ángulo agudo o reducido en los cuadrantes antes localizados, aplicando la función trigonométrica inversa al valor absoluto dado para obtener así dicho ángulo agudo ;

c) se aplica la fórmula correspondiente a cada uno de esos cuadrantes solamente para la igualdad

"ángulo agudo obtenido en el inciso (*b*) = ángulo agudo equivalente reducido por las fórmulas de reducción".

Ejemplo 1: *arc sen* (- 0.819152044) (negativo)

Solución: a) Se localizan los dos cuadrantes en los que la función *seno* es negativa: son el tercero y cuarto cuadrantes.

b) Tomando la función trigonométrica inversa con el valor absoluto del argumento, es decir $arc\ sen\left|-0.819152044\right| = arc\ sen\ 0.819152044 = 55$. Este es el ángulo agudo. Como el *arco seno* original es negativo, se encuentra que la función *seno* es negativa en el tercero y cuarto cuadrantes. Allí estarán las dos soluciones.

c) La fórmula de reducción es

$$sen\ \theta = -\ sen\ (\theta - 180)$$

y conforme a la figura 4.3:

$$55 = \theta - 180$$

de donde se obtiene que la primera solución es

$$\theta_1 = 55 + 180$$

$$\boxed{\theta_1 = 235}$$

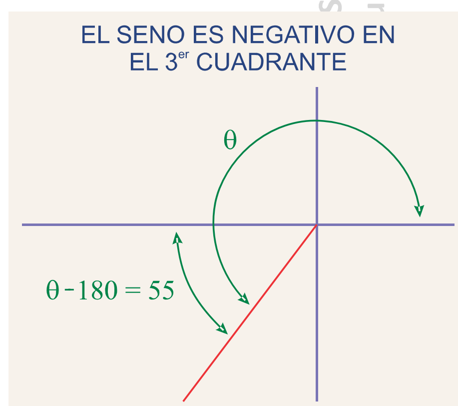

figura 4.3

Para la segunda solución, como la fórmula de reducción es

$$sen\,(360-\theta) = -\,sen\,\theta$$

y conforme a la figura 4.4:

$$55 = 360 - \theta$$

de donde se obtiene la segunda solución:

$$\theta_2 = 360 - 55$$

$$\boxed{\theta_2 = 305}$$

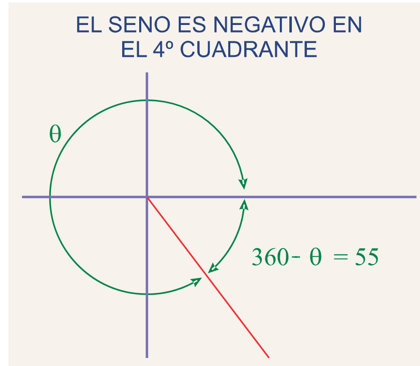

figura 4.4

Ejemplo 2: $arc\,cos$ (- 0.819152044) (negativo)

Solución: a) El *coseno* es negativo en el segundo y tercer cuadrantes.

b) Tomando la función trigonométrica inversa con el valor absoluto del argumento:

$$arccos\left|-0.819152044\right| =$$
$$= arc\,cos\;0.819152044$$
$$= 35$$

se obtiene un ángulo de 35º. Este es el ángulo agudo. Como el *arco coseno* original es negativo, se encuentra que la función *coseno* es negativa en el segundo y tercer cuadrantes. Allí estarán las dos soluciones.

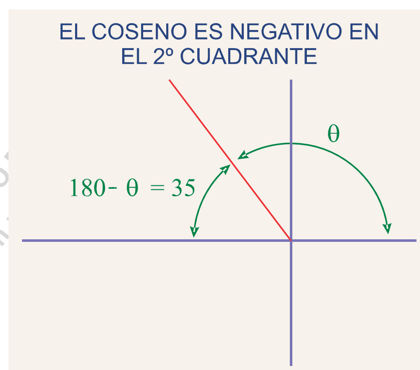

figura 4.5

c) La fórmula de reducción es

$$cos\,\theta = -\,cos\,(180-\theta)$$

y conforme a la figura 4.5:

$$35 = 180 - \theta$$

de donde se obtiene que la primera solución es

$$\theta_1 = 180 - 35$$

$$\boxed{\theta_1 = 145}$$

Para la segunda solución, como la fórmula de reducción es

$$cos\ \theta = -\ cos\ (\theta - 180)$$

y conforme a la figura 4.6:

$$35 = \theta - 180$$

de donde se obtiene la segunda solución:

$$\theta_2 = 180 + 35$$

$$\boxed{\theta_2 = 215}$$

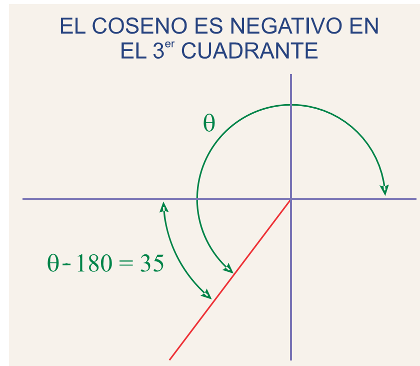

figura 4.6

Ejemplo 3: *arc tan* 1 (positiva)

Solución: a) Se localizan los dos cuadrantes en los que la función *tangente* es positiva: son el primero y tercer cuadrantes.

b) Tomando la función trigonométrica inversa con el valor absoluto del argumento, es decir

$$arc\ tan\ |1| = arc\ tan\ 1 = 45$$

se obtiene un ángulo de 45º. Este es el ángulo agudo. Como la *arco tangente* original es positiva, se encuentra que la función *tangente* es positiva en el primero y tercer cuadrantes. Allí estarán las dos soluciones.

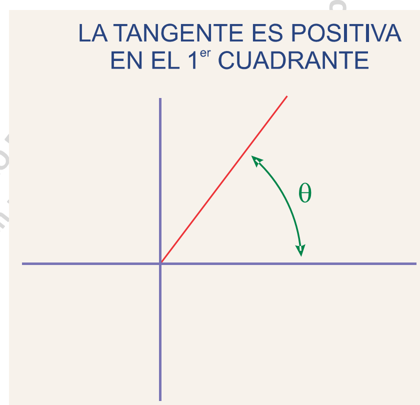

figura 4.7

c) Como en el primer cuadrante no hay fórmulas de reducción, puesto que allí los ángulos ya están reducidos, es decir, son menores de 90º, (figura 4.7), esa es ya la primera solución:

$$\boxed{\theta_1 = 45}$$

Para la segunda solución, como la fórmula de reducción es

$$tan\ \theta = tan\left(\theta - 180\right)$$

y conforme a la figura 4.8:

$$45 = \theta - 180$$

de donde se obtiene que la segunda solución es

$$\theta_2 = 180 + 45$$

$$\boxed{\theta_2 = 225}$$

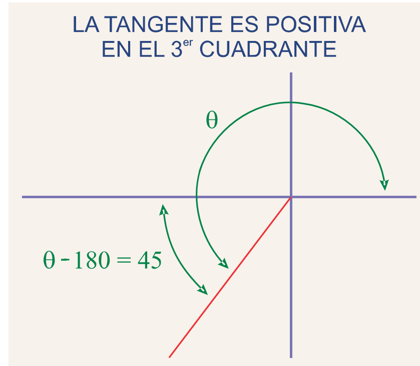

figura 4.8

EJERCICIO 4.2

Encontrar las dos soluciones de las siguientes funciones trigonométricas inversas:

1) *arc sen* (- 0.37460659)
2) *arc cos* (- 0.587785253)
3) *arc tan* (- 0.72654252)
4) *arc sen* (- 0.25881904)
5) *arc cos* (- 0.987688340)
6) *arc tan* (- 0.24932800)
7) *arc sen* (- 0.92718385)
8) *arc cos* (- 0.275637355)
9) *arc tan* (- 0.90040404)

10) *arc sen* (0.84804809)
11) *arc cos* (0.484809620)
12) *arc tan* (- 1.60033452)
13) *arc sen* (0.97437006)
14) *arc cos* (0.994521895)
15) *arc tan* (4.70463010)
16) *arc sen* (- 0.76604444)
17) *arc cos* (- 0.374606593)
18) *arc tan* (1.15036840)
19) *arc sen* (- 0.98768834)
20) *arc cos* (0.707106781)
21) *arc tan* (- 1.96261050)
22) *arc sen* (0.99939082)
23) *arc cos* (- 0.970295726)
24) *arc tan* (3.27085261)
25) *arc sen* (0.75470958)
26) *arc cos* (0.573576436)
27) *arc tan* (- 2.90421087)
28) *arc sen* (- 0.65605902)
29) *arc cos* (- 0.669130606)
30) *arc tan* (6.31375151)