# 3 DOMINIO Y RANGO



## 3.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Cuando se grafica una función existen las siguientes posibilidades:

a) Que la gráfica ocupe todo el plano horizontalmente (sobre el eje de las $x$).
b) Que la gráfica ocupe parte del plano horizontalmente (sobre el eje de las $x$).
c) Que la gráfica ocupe todo el plano verticalmente (sobre el eje de las $y^{es}$).
d) Que la gráfica ocupe parte del plano verticalmente (sobre el eje de las $y^{es}$).

Por ejemplo, si se grafica la ecuación de la circunferencia

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=49$$

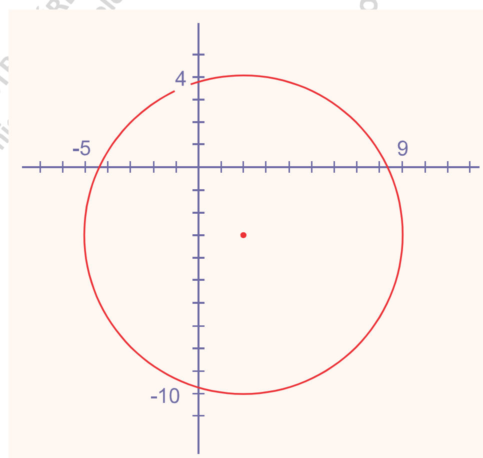



figura 3.1

como puede verse en la figura 3.1, la gráfica no ocupa todo el espacio horizontal ni verticalmente. En $x$ la gráfica ocupa el espacio que va desde $x=-5$ hasta $x=9$, o sea en el intervalo $-5\le x\le 9$; mientras que en $ye$ (vertical) la gráfica ocupa el espacio que va desde $y=-10$ hasta $y=4$, es decir en el intervalo $-10\le y\le 4$. Fuera de esos dos intervalos no existe gráfica.

Lo anterior significa que al tabular para hacer la circunferencia anterior, a la variable $x$ solamente se le pueden dar valores que vayan de $x=-5$ hasta $x=9$. En otras palabras, cada vez que se le dé un valor a la $x$ que esté dentro del intervalo $-5\le x\le 9$, se obtiene un valor para la $ye$; pero si se le da un valor fuera de ese intervalo no se obtiene nada para $ye$.

Por ejemplo, si $x = 5$, sustituyendo en la ecuación de la circunferencia se obtiene:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$(5-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$9 + (y+3)^2 = 49$$
$$(y+3)^2 = 49 - 9$$
$$(y+3)^2 = 40$$
$$y + 3 = \pm\sqrt{40}$$
$$y + 3 = \pm 6.32$$
$$y = \pm 6.32 - 3$$

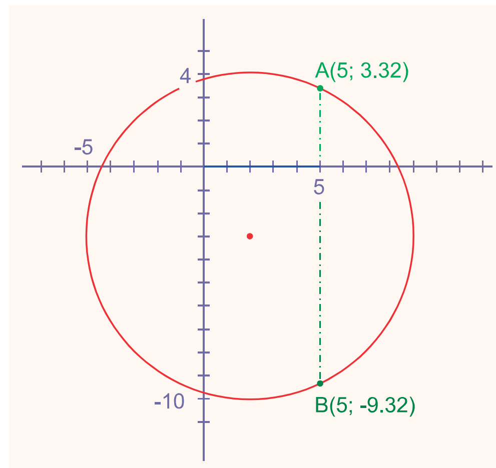


figura 3.2

Tomando el signo positivo:

$$y_1 = +6.32 - 3$$
$$y_1 = 3.32$$ (corresponde al punto A en la figura 3.2)

Tomando el signo negativo:

$$y_2 = -6.32 - 3$$
$$y_2 = -9.32$$ (corresponde al punto B en la figura 3.2).

En cambio, si se le da un valor de $x = 11$, como está fuera del intervalo de la gráfica, no se obtiene nada para la *ye*. Haciéndolo:

$$(11-2)^2 + (y+3)^2 = 49$$
$$81 + (y+3)^2 = 49$$
$$(y+3)^2 = 49 - 81$$
$$(y+3)^2 = -32$$

lo cual no es posible porque ninguna cantidad elevada al cuadrado da un número negativo.

## 3.2 DOMINIO

El dominio, en términos no técnicos, son todos los valores que se le pueden dar a la variable $x$ con los cuales la variable dependiente *ye* adquiere a su vez un valor real y bien determinado. O bien, son todos los valores que se le pueden dar a la variable $x$ con los cuales se obtiene su gráfica.

> El dominio es el conjunto de puntos o valores que puede tomar la variable independiente $x$ en los cuales está definida la función.



Obsérvese que en el ejemplo de la circunferencia anterior no se le pudo dar a la $x$ el valor de $x = 11$ porque no se podía obtener nada para la variable *ye*; significa que $x = 11$ no pertenece al dominio. Visto en la gráfica, en $x = 11$ no hay gráfica.

Los valores que no puede tomar la variable $x$ son dos: los que hacen cero el denominador o los que hacen negativa una raíz cuadrada. En realidad hay más, pero en este curso solamente se tomarán en cuenta esos dos.

De tal manera que el dominio de cualquier función (al menos de las que se verán en este curso) se puede sintetizar en la siguiente regla:

> El dominio de cualquier función son todos los valores o números de la recta numérica, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, que queden después de quitar todos aquellos que hacen *cero el denominador* (o denominadores) o que hagan *negativa una raíz cuadrada.*

Para encontrar los valores que hacen cero el denominador (o los denominadores), se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación que resulta. Para encontrar los valores que hacen negativa una raíz cuadrada se construye una desigualdad haciendo el subradical menor que cero, porque los números menores que cero son negativos.

Se deduce de lo anterior que toda función que no tenga denominadores con variable allí y que no tenga raíces cuadradas, su dominio son todas las $x$, es decir, toda la recta numérica, escrito: $-\infty < x < +\infty$.

Ejemplo 1: Hallar el dominio de $f(x) = 3x + 2$.

Solución: Como no hay denominadores ni raíces cuadradas, no hay que quitar de la recta numérica nada; por lo tanto, el dominio son todas las $x$. Esto quiere decir que se le puede dar a la $x$ cualquier valor y siempre se obtendrá un número real al hacer la cuenta $3x + 2$.

Ejemplo 2: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Solución: En este caso no hay raíces cuadradas, pero sí existe un denominador con variable. Entonces debe buscarse el valor que hace cero ese denominador y excluirlo de la recta numérica.

El valor que hace cero el denominador se obtiene haciéndolo cero, o sea

$$x - 2 = 0$$

de donde

$$x = 2$$

Este es el único valor que no puede tomar la $x$, por lo tanto el dominio son todos los de la recta numérica, excepto el 2, lo cual se escribe de cualquiera de las siguientes formas:

$$\boxed{x \neq 2}$$

o bien, aunque más complicado

$$x < 2 \cup x > 2$$

Significa que la gráfica se formará en toda la recta numérica, excepto en $x = 2$. La construcción de gráficas en detalle se verá en el próximo capítulo.

Ejemplo 3: Hallar el dominio de $y = \sqrt{x-3}$.

Solución: En este ejemplo se necesita que el valor de la raíz cuadrada sea igual a cero o que sea positivo, porque no pueden existir raíces negativas. Existen entonces dos caminos a seguir para encontrar el dominio:

a) Hallar los valores de $x$ para los cuales la raíz cuadrada es cero o positiva. Esos valores son el dominio; o bien

b) hallar los valores de $x$ para los cuales la raíz cuadrada es negativa y descartarlos de la recta numérica; lo que queda es el dominio.

## PRIMERA FORMA

Como la raíz cuadrada debe ser cero o positiva, es lo mismo que

$$x - 3 \geq 0$$

Resolviendo:

$$\boxed{x \geq 3}$$

Ése es el dominio. La función $y = \sqrt{x - 3}$ tiene sentido o toma valores reales cuando la $x$ tome valores igual a 3 o mayores (figura 3.3).

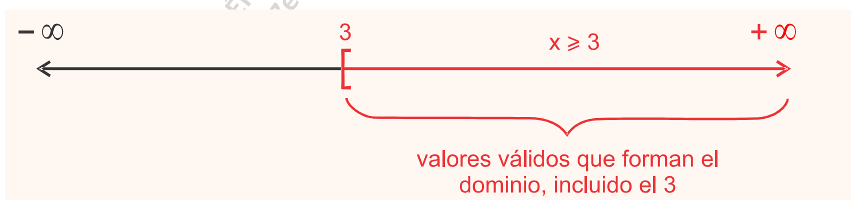



figura 3.3



## SEGUNDA FORMA

Consiste en descartar de la recta numérica los valores para la $x$ no válidos y entonces el dominio queda formado por los valores no descartados. Aplicando esta segunda forma al presente ejemplo:

Los valores para la variable $x$ no válidos, o sea que no puede tomar son aquellos que hacen negativa a la raíz cuadrada (menores que cero):

$$x - 3 < 0$$

resolviendo:

$$x < 3$$

Como las equis menores que 3 son los valores no válidos, deben descartarse de la recta numérica, lo cual de manera gráfica resulta muy práctico y comprensible (figura 3.4):

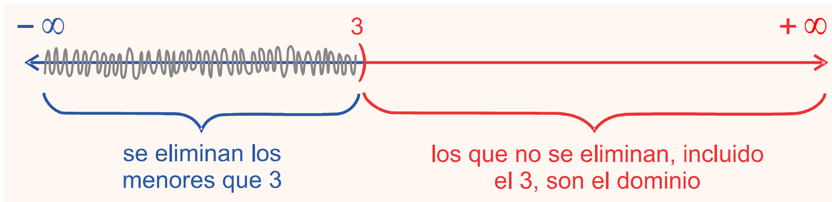



figura 3.4

La solución son todos los valores para la $x$ que no fueron eliminados:

$$\boxed{x \geq 3}$$

Ejemplo 4: Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-7}$

Solución: En este caso existe un denominador con variable y una raíz cuadrada. Para encontrar el dominio puede resultar más práctica la segunda forma vista en el ejemplo anterior, es decir, eliminando todas las equis que hacen cero el denominador y las que hacen negativa la raíz cuadrada.

a) Valor que hace cero el denominador:

$$x - 7 = 0$$

$$\boxed{x = 7}$$

b) Valores que hacen negativa la raíz cuadrada:

$$x - 3 < 0$$

$$\boxed{x < 3}$$

Significa que las equis que no son válidas son todas las menores que tres y además la que vale 7. Quitándolas de toda la recta numérica quedan las que sí son válidas, o sea el dominio. Es importantísimo notar que $x = 3$ no se elimina. Para indicar gráficamente que un solo valor se elimina se hace con un círculo en blanco que represente dicho número, en este ejemplo es el 7. Verlo en la figura 3.5.

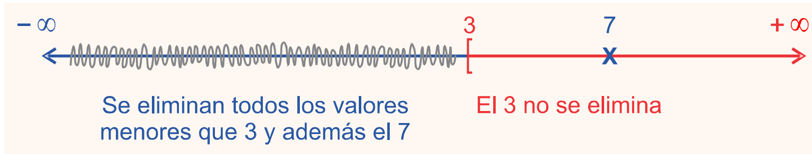



figura 3.5

Entonces el dominio es

$$x \geq 3 \ , \ \text{con} \ \ x \neq 7$$

o gráficamente:

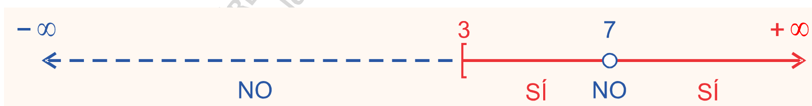



figura 3.6

Ejemplo 5: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 20}$

Solución: Los valores que hacen cero el denominador se obtienen haciendo precisamente igual a cero dicho denominador, y resolviendo:

$$x^2 + x - 20 = 0 \qquad \text{(éste es el denominador)}$$

de donde

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = 4$$

Quitando esos dos valores de la recta numérica se obtiene el dominio:


figura 3.7

lo cual se escribe

$$x \neq -5 \quad \text{y} \quad x \neq 4$$

o bien, aunque de lectura más complicada:

$$x \neq -5 \ \cup \ x \neq 4$$

Ejemplo 6: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 15}}{x - 8}$

Solución: Los valores válidos para la $x$ son los que hacen cero o positiva la raíz cuadrada y, además, el que hace cero el denominador no es válido.

a) Los valores para $x$ que hacen cero o positiva la raíz cuadrada se obtienen haciendo

$$x^2 + 2x - 15 \geq 0$$

Recordando lo que se vio en el capítulo de desigualdades, resolviendo la ecuación

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

se llega a que

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = 3$$


Probando con $x = 0$ :

$$0^2 + 2(0) - 15 \geq 0$$
$$-15 \geq 0 \qquad ✘ \ \text{Falso}$$

Por lo tanto el intervalo al que pertenece el cero no es parte de la solución, o sea el intervalo de $-5$ a $3$ no es solución. No pertenece al dominio.

b) El valor que hace cero denominador es

$$x - 8 = 0$$

de donde

$$x = 8$$

valor que debe eliminarse también de la recta numérica. Lo que queda en la recta numérica son los valores que sí son válidos, o sea el dominio. Nótese que $x = -5$ lo mismo que $x = 3$ no se eliminan porque dichos valores hacen igual a cero la raíz cuadrada.

El dominio, por lo tanto, es:

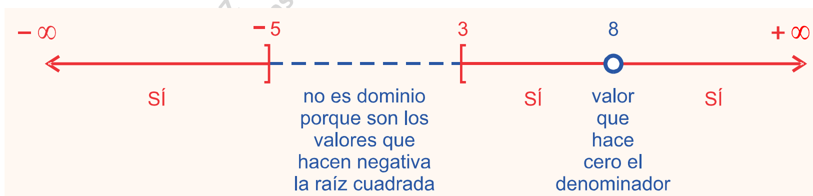



figura 3.9

escrito

$$x \leq -5 \ \cup \ x \geq 3 \ , \text{ con } \ x \neq 8$$

Ejemplo 7: Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x + 11}}$

Solución: El dominio está formado por todos los valores de $x$, excepto los valores que hacen negativa o igual a cero la raíz cuadrada. En otras palabras, son todos los valores de $x$ que hacen positiva la raíz cuadrada, o sea:

$$x + 11 > 0$$

$$\boxed{x > -11}$$

Ése es el dominio. Obsérvese que el valor extremo $x = -11$ no pertenece al dominio porque con ese valor el denominador se hace cero.

Ejemplo 8: Hallar el dominio de $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2-7x+9}}$

Solución: El dominio está formado por todas las equis que hagan positiva la raíz cuadrada, excepto aquellos valores que la hacen cero. O sea

$$4x^2-7x+9>0$$

Esta desigualdad se resolvió en las páginas 18 a 20, obteniéndose que todas las equis hacen a la raíz cuadrada positiva, o sea, mayor que cero. Por lo tanto el dominio son todas las equis.

## EJERCICIO 3.1

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1) $y = x$

2) $y = 3x$

3) $y = 5x + 1$

4) $y = x^2$

5) $y = -x^2$

6) $y = -x$

7) $y = \sqrt{x}$

8) $y = \sqrt{x + 2}$

9) $y = -\sqrt{x}$

10) $y = \sqrt{-x}$

11) $y = \sqrt{5x - 3}$

12) $y = \sqrt{8x + 1}$

13) $y = \sqrt{-2x - 9}$

14) $y = \sqrt{-5x + 1}$

15) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

16) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

17) $y = \sqrt{3x^2 - 14x - 5}$

18) $y = \sqrt{-2x^2 + 5x + 7}$

19) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

20) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

21) $y = \dfrac{2x}{3x - 4}$

22) $y = \dfrac{5x - 4}{4x}$

23) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

24) $y = \dfrac{16}{2x^2 - 32}$

25) $y = \dfrac{11}{x^3}$

26) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

27) $y = \dfrac{13}{2x^2 + 1}$

28) $y = \dfrac{2x - 11}{36 - x^2}$

29) $y = \dfrac{\sqrt{3x + 7}}{2x - 5}$

30) $y = \dfrac{\sqrt{11 - 3x}}{x + 13}$

31) $y = \dfrac{\sqrt{12 - 5x}}{3x + 13}$

32) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 6}$

33) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 42}}{3x - 31}$

34) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}{x - 7}$

35) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}{x - 11}$

36) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 30}}{x^2 - 100}$

37) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{x - 2}}$

38) $y = \dfrac{2}{\sqrt{5x - 1}}$

39) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{9 - 2x}}$

40) $y = \dfrac{6}{\sqrt{-x}}$

## 3.3 RANGO

El rango de una función es equivalente al dominio, solamente que mientras éste es sobre el eje de las $x$, el rango es sobre el eje de las $y^{es}$.

Analizado la función desde su gráfica, aunque de manera no muy formal se puede decir que el dominio es el intervalo de valores de la $x$ en la que existe su gráfica, mientras que *el rango* es el intervalo de valores de la *ye* en la que existe su gráfica.

Por ejemplo, obsérvese en la figura 3.10 la gráfica correspondiente a la ecuación de la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

respecto del eje $x$, la gráfica existe en el intervalo $-4 \le x \le 8$: éste es el *dominio*. Mientras que respecto del eje *ye*, la gráfica existe en el intervalo $-10 \le y \le 2$: éste es el *rango*.

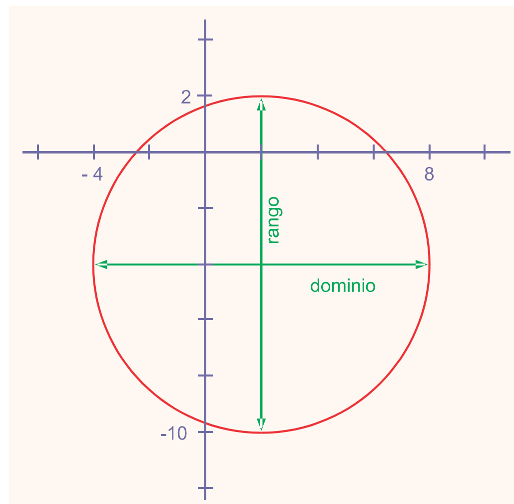



figura 3.10

Para calcular el dominio, tal como ya se estudió al inicio de este capítulo, estando despejada la *ye*, se eliminan los valores de la $x$ que hacen cero el denominador o negativa la raíz cuadrada. De la misma forma, para calcular el rango, estando despejada ahora la $x$, se eliminan los valores de la *ye* que hacen cero el denominador o negativa la raíz cuadrada.



Ejemplo 1: Obtener el dominio y el rango de la circunferencia de la figura 3.10.

Solución: Para obtener el dominio, primero debe despejarse la *ye* de la ecuación correspondiente a la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$(y+4)^2 = 36 - (x-2)^2$$

$$y + 4 = \sqrt{36 - (x-2)^2}$$

$$y + 4 = \sqrt{36 - (x^2 - 4x + 4)}$$

$$y + 4 = \sqrt{-x^2 + 4x + 32}$$

$$y = -4 + \sqrt{-x^2 + 4x + 32}$$

a) Los valores que hacen cero el denominador: no hay.

b) Los valores que hacen negativa la raíz cuadrada son

$$-x^2 + 4x + 32 < 0$$

que resolviendo conforme alguno de los métodos ya estudiados en este curso se obtiene que lo valores más chicos que menos cuatro y los más grandes que ocho hacen negativa la raíz cuadrada (ver figura 3.11), por lo que deben eliminarse. Entonces solamente quedan los valores comprendidos entre menos cuatro y ocho, incluidos ambos. Éste es el dominio.

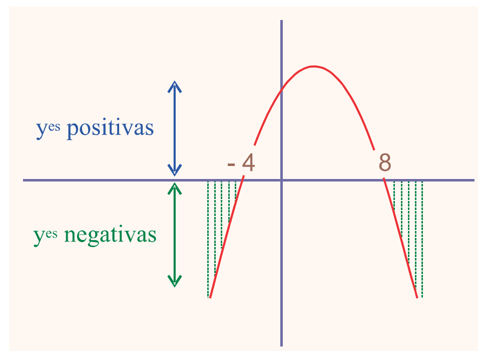



figura 3.11

El dominio es

$$\boxed{-4 \leq x \leq 8}$$

(comprobarlo en la figura 3.10)

Para obtener el rango, primero debe despejarse la $x$ de la ecuación correspondiente a la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$(x-2)^2 = 36 - (y+4)^2$$

$$x - 2 = \sqrt{36 - (y+4)^2}$$

$$x - 2 = \sqrt{36 - (y^2 + 8y + 16)}$$

$$x - 2 = \sqrt{36 - y^2 - 8y - 16}$$

$$x - 2 = \sqrt{-y^2 - 8y + 20}$$

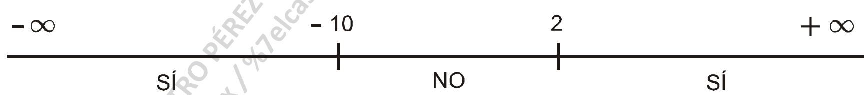
$$x = 2 + \sqrt{-y^2 - 8y + 20}$$

Una vez despejada la variable $x$ se hace el mismo análisis que para el dominio, es decir, se buscan los valores, ahora de la variable *ye*, que hacen cero el denominador y negativa la raíz cuadrada y se eliminan de la recta numérica. Lo que queda es el rango.

En este caso no hay valores que hagan cero el denominador porque no hay denominador. En cambio, los valores que hacen negativa la raíz cuadrada son:

$$-y^2 - 8y + 20 < 0$$

Resolviendo esta desigualdad por el método de intervalos, se llega a que




Significa que las $y^{es}$ menores que - 10 y las mayores que 2 hacen negativa a la raíz cuadrada por lo que deben eliminarse de la recta numérica, quedando los valores entre - 10 y 2 incluidos estos extremos:


figura 3.12

de manera que el rango es

$$\boxed{-10 \le y \le 2}$$

(comprobarlo en la figura 3.10)

## EJERCICIO 3.2

Determinar el rango de las siguientes funciones:

1) $y = 5x - 3$

2) $y = \dfrac{1}{x}$

3) $y = \dfrac{1}{x - 4}$

4) $y = \dfrac{4}{2x + 5}$

5) $y = \dfrac{2}{2 - 7x}$

6) $y = \dfrac{x}{x - 6}$

7) $y = \dfrac{x - 1}{x + 4}$

8) $y = \dfrac{9 - x^2}{2x^2}$

9) $y = \dfrac{16 + 7x^2}{x^2}$

10) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{x}$