CAPÍTULO 3

LA DERIVADA

3.1 DEFINICIÓN

En el primer capítulo se estudió el concepto de límite y en el segundo la idea de incrementos. Uniendo estos dos conceptos se llega a la parte medular del contenido de cálculo diferencial, que es *la derivada*.

Para representar la derivada existen tres formas, la primera se llama notación de *Leibnitz* y es $\frac{dy}{dx}$, que se lee "la derivada de *ye* con respecto a *x*", aunque abreviadamente suele decirse únicamente "la derivada de *ye*". La segunda es la notación de *Lagrange* que es y'; y finalmente la tercera es la notación debida a *Cauchy* que es $D_x y$. La que se empleará en este curso es la primera.

Se define la derivada como el límite, cuando Δx tiende a cero, del cociente de los incrementos Δy entre Δx, que en notación matemática se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para explicar su significado, se empleará un ejemplo numérico. Sea $y = x^2$. Obteniendo el incremento Δy conforme lo visto en el capítulo anterior se tiene que

$$y = x^2$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$$

$$\boxed{\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2} \qquad (3.1)$$

Esta fórmula es la que se empleará en las siguiente tablas para obtener el valor del incremento Δy de la variable ye, en donde debe tomarse en cuenta que x representa el valor inicial.

A continuación se elaborarán varias tablas, como se hizo en el capítulo I al explicar el concepto de límite, solamente que ahora contendrán tres filas para poder ver hacia dónde se acerca el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando el incremento de x tiende a cero.

Dando un valor inicial arbitrario a la variable x, por ejemplo $x = 4$, cuando el incremento de x es $\Delta x = 0.1$, el incremento Δy se obtiene empleando la fórmula (3.1) :

$$\Delta y = 2(4)(0.1) + (0.1)^2 = 0.81$$

de la misma forma para cuando $\Delta x = 0.01$

$$\Delta y = 2(4)(0.01) + (0.01)^2 = 0.0801$$

o para $\Delta x = 0.001$, cuyos valores se concentran en la siguiente tabla:

Δx	0.1	0.01	0.001	0.000000000001
Δy	0.81	0.0801	0.008001	0.000000000008000000000001
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	8.1	8.01	8.001	8.000000000001

etc.

Se ve que conforme Δx tiende a cero, por su parte el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima a 8. Entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 8$, para el valor inicial de $x = 4$.

Repitiendo el proceso con un nuevo valor inicial, por ejemplo para $x = 5$:

Δx	0.1	0.01	0.001	0.000000000001
Δy	1.01	0.1001	0.010001	0.000000000010000000000001
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	10.1	10.01	10.001	10.000000000001

etc..

Se ve que conforme Δx tiende a cero, por su parte el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima a 10. Entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 10$, para el valor inicial de $x = 5$.

Repitiendo el proceso con otro valor inicial, por ejemplo para $x = 7$:

Δx	0.1	0.01	0.001	0.00000000001
Δy	1.41	0.1401	0.014001	0.0000000001400000000001
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	14.1	14.01	14.001	14.00000000001

etc.

Se ve que conforme Δx tiende a cero, por su parte el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima a 14. Entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 14$, para el valor inicial de $x = 7$.

Se pueden sintetizar los resultados de las anteriores tablas de la manera siguiente:

Para $x = 4$:	Para $x = 5$:	Para $x = 7$:
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 14$

En cada caso existe una regularidad: el cociente de los incrementos Δy entre Δx siempre tiende al doble del valor inicial de x, es decir, el límite siempre es el doble del valor de x, lo cual puede escribirse en términos genéricos como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

y como este límite es la derivada de la función en cuestión (en este caso, $y = x^2$), entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

En resumen: la derivada de la función $y = x^2$ es $\frac{dy}{dx} = 2x$.

3.2 DERIVADA POR INCREMENTOS

Dado que por definición $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, otra forma de encontrar la derivada de una función es construyendo el cociente de los incrementos Δy entre Δx y calculando su límite cuando Δx tiende a cero, en donde el incremento Δy se obtiene aplicando la técnica estudiada en el capítulo anterior relativo a incrementos.

Para el caso particular de la función $y = x^2$ del ejemplo tomado en el apartado 3.1, se calculó que el incremento de *ye* es $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ (ver página 30), de manera que aplicando la definición de derivada se llega a que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x(0) + (0)^2}{0} = \frac{0}{0}$$

Como da una forma indefinida, se aplica la técnica vista en el primer capítulo referente a límites, es decir, se debe factorizar, simplificar y volver a calcular el límite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}\left(2x+\Delta x\right)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x}$$

y como ese límite es la derivada, finalmente se tiene que

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

Ejemplo 1: Calcular, por incrementos, la derivada de la función $y=3x^2+x-2$.

Solución: Primero debe obtenerse el incremento Δy:

$$y=3x^2+x-2$$

$$y+\Delta y=3\left(x+\Delta x\right)^2+\left(x+\Delta x\right)-2$$

$$\Delta y=3\left(x+\Delta x\right)^2+\left(x+\Delta x\right)-2-y$$

$$\Delta y=3\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)+x+\Delta x-2-3x^2-x+2$$

$$\Delta y=3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2+x+\Delta x-2-3x^2-x+2$$

$$\Delta y=6x\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x$$

entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x(0) + 3(0)^2 + (0)}{(0)} = \frac{0}{0}$$

Como se obtiene una forma indeterminada, hay que factorizar, simplificar y volver a calcular el límite en la fracción simplificada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6x + 3\Delta x + 1)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x + 1)$$

$$= 6x + 3(0) + 1$$

$$= 6x + 1$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 6x + 1}$$

Ejemplo 2: Calcular, por incrementos, la derivada de $y = \frac{1}{x}$

Solución: Obteniendo primero el incremento Δy, conforme a las reglas vistas en el capítulo 2:

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\Delta y = \frac{x - \left(x + \Delta x\right)}{x\left(x + \Delta x\right)}$$

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$$

Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(x^2 + x\Delta x\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + x\left(0\right)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}}$$

Ejemplo 3: Obtener por incrementos la derivada de $y = \dfrac{2x}{3x-1}$

Solución: Obteniendo primero el incremento Δy, conforme a las reglas vistas en el capítulo 2:

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)-1} - \frac{2x}{3x-1}$$

$$= \frac{2x+2\Delta x}{3x+3\Delta x-1} - \frac{2x}{3x-1}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x)(3x-1)-2x(3x+3\Delta x-1)}{(3x+3\Delta x-1)(3x-1)}$$

$$\Delta y = \frac{-2\Delta x}{(3x+3\Delta x-1)(3x-1)}$$

Entonces

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{\dfrac{-2\Delta x}{(3x+3\Delta x-1)(3x-1)}}^{\leftarrow \Delta y}}{\underbrace{\Delta x}_{\leftarrow \Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(3x+3\Delta x-1)(3x-1)}$$

$$= \frac{-2}{[3x+3(0)-1](3x-1)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(3x-1)^2}}$$

EJERCICIO 3.1

Obtener la derivada de las siguiente funciones por incrementos:

1) $y = 4x^2$

2) $y = 5x^2 + x$

3) $y = x^2 - 7x - 8$

4) $y = 6x - 9$

5) $y = 4 - 3x$

6) $y = 4x^2 + 6x - 11$

7) $y = 8x^3$

8) $y = x^3 - x^2$

9) $y = 2x^3 + 7x^2 - x$

10) $y = x^3 - 8x + 9$

11) $y = \dfrac{1}{x}$

12) $y = \dfrac{x}{x-1}$

13) $y = \dfrac{1}{x^2}$

14) $y = \dfrac{x^2}{3x-2}$

15) $y = \dfrac{4x}{x^2 - 8}$

16) $y = \dfrac{2x-7}{3x+6}$

17) $y = \sqrt{x}$

18) $y = \sqrt{x^2 + x}$

19) $y = \sqrt{2x - 11}$

20) $y = \sqrt{5x^2 + 6x - 7}$