2 PRODUCTOS NOTABLES

ÍNDICE PARTICULAR

2. Concepto ____ 22
2.1 binomios al cuadrado ____ 22
ejercicio 2.1 ____ 25
2.2 binomios conjugados ____ 25
ejercicio 2.2 ____ 27
2.3 binomios con un término común ____ 27
ejercicio 2.3 ____ 28

2 CONCEPTO

Conviene recordar algunas definiciones básicas.

Así como cuando Adalberto se dedica a jugar, por ejemplo, el futbol, se le llama *futbolista* y cuando cambia de actividad, por ejemplo al béisbol, se le llama ahora *beisbolista*, sin que deje por eso de ser Adalberto, de la misma manera un número cualquiera, por ejemplo el 23, cuando "se dedica a jugar el deporte" conocido en Matemáticas como **suma**, se le llama sumando si se está en el terreno de la Aritmética, o bien término si se está en el Álgebra, y cuando cambia a otro "deporte" conocido en Matemáticas como **multiplicación**, se le llama ahora factor, sin que deje de ser por eso el mismo número 23.

La figura 2.1 muestra los nombres que reciben las cantidades de acuerdo con el papel que desempeñen dentro de una operación.

En el cuadro de la derecha se ve que *producto* significa el resultado que se obtiene de multiplicar dos cantidades, ya sea en la Aritmética o en el Álgebra.

Producto notable significa entonces "un resultado notable de cierta multiplicación". Aquí *notable* adquiere el sentido de *especial*, o sea que un producto notable es sinónimo de un resultado especial de alguna multiplicación en especial. Los productos notables son reglas para obtener el resultado de algunas multiplicaciones especiales en forma rápida, sin necesidad de realizar la operación.

	EN ARITMÉTICA	EN ÁLGEBRA
SUMA	23 SUMANDO + 17 SUMANDO 40 SUMA O TOTAL	a TÉRMINO + b TÉRMINO a + b SUMA O TOTAL
MULTIPLICACION	23 FACTOR × 7 FACTOR 161 PRODUCTO	a FACTOR × b FACTOR ab PRODUCTO

figura 2.1

2.1 BINOMIOS AL CUADRADO

El binomio $(a+b)^2$, significa $(a+b)(a+b)$. Si se realiza la operación para obtener el resultado, o sea, para obtener el producto, se tiene que

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b\qquad\quad} \\ a^2+ab \\ \underline{\qquad +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

De la misma forma, el binomio $(a - b)^2$, significa $(a - b)(a - b)$ y si se realiza la operación para obtener el resultado, o sea, para obtener el producto, se tiene que

$$\begin{array}{l} a - b \\ \underline{a - b} \\ a^2 - ab \\ \underline{ - ab + b^2} \\ a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

de donde se deduce la siguiente regla:

Un binomio al cuadrado es igual a:

* *El cuadrado del primer término,*
* *más (o menos) el doble producto del primero por el segundo,*
* *más el cuadrado del segundo término.*

Ejemplo 1: $(2a + 3b)^2$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(2a)^2 = 4a^2$
* Doble producto del primero por el segundo: $2(2a)(3b) = 12ab$
* Cuadrado del segundo término: $(3b)^2 = 9b^2$

Así que $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

Ejemplo 2: $(6ac - 7)^2$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(6ac)^2 = 36a^2c^2$
* Doble producto del primero por el segundo: $2(6ac)(7) = 84ac$
* Cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Así que $(6ac - 7)^2 = 36a^2c^2 - 84ac + 49$

Ejemplo 3: $(4a^2c + 3b^5)^2$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(4a^2c)^2 = 16a^4c^2$
* Doble producto del primero por el segundo: $2(4a^2c)(3b^5) = 24a^2b^5c$
* Cuadrado del segundo término: $(3b^5)^2 = 9b^{10}$

Así que $(4a^2c + 3b^5)^2 = 16a^4c^2 + 24a^2b^5c + 9b^{10}$

Ejemplo 4: $(14)^2$

Solución: En este caso, el 14 se puede descomponer en la suma de 10 + 4, convirtiéndose así en un binomio, es decir que $(14)^2 = (10 + 4)^2$. Aplicándole la regla se obtiene:

* Cuadrado del primer término: $10^2 = 100$
* Doble producto del primero por el segundo: $2(10)(4) = 80$
* Cuadrado del segundo término: $4^2 = 16$

Así que $(10 + 4)^2 = 100 + 80 + 16 = 196$

Ejemplo 5: $(2a - b)^2$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(2a)^2 = 4a^2$
* Doble producto del primero por el segundo: $2(2a)(b) = 8ab$
* Cuadrado del segundo término: $(b)^2 = \mathrm{b}^2$

Así que $(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + b^2$

Ejemplo 6: $(19)^2$

Solución: En este caso, el 19 se puede descomponer en la resta de 20 - 1, convirtiéndose así en un binomio, es decir que $19^2 = (20 - 1)^2$. Aplicándole la misma regla se obtiene:

* Cuadrado del primer término: $20^2 = 400$
* Doble producto del primero por el segundo: $2(20)(1) = 40$
* Cuadrado del segundo término: $1^2 = 1$

Así que $(20 - 1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

Ejemplo 7: $\left(\frac{3x}{8} + 4\right)^2$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $\left(\frac{3x}{8}\right)^2 = \frac{9x^2}{64}$

* Doble producto del primero por el segundo: $2\left(\frac{3x}{8}\right)(4) = \frac{24x}{8} = 3x$

* Cuadrado del segundo término: $(4)^2 = 16$

Así que $\left(\frac{3x}{8} + 4\right)^2 = \frac{9x^2}{64} + 3x + 16$

EJERCICIO 2.1

1)	$(3b + ac^2)^2$	2)	$(2ax + 9)^2$	3)	$(c^2 + 7m^3)^2$
4)	$(8ab + 2c^3)^2$	5)	$(9x^3 + 9)^2$	6)	$(5c^6 + 11x^7)^2$
7)	$(3 + 12c^2)^2$	8)	$(2a^3x + 7bc^3)^2$	9)	$(c^7 + 7)^2$
10)	$(5a + 2c^2)^2$	11)	$(2b^5y + 11c^4)^2$	12)	$(d^9 + 1)^2$
13)	$(b^6 + 6c^6)^2$	14)	13^2	15)	15^2
16)	21^2	17)	22^2	18)	31^2
19)	41^2	20)	42^2	21)	101^2
22)	14^2	23)	51^2	24)	102^2
25)	$(b^9g - y^2)^2$	26)	$(9x^3y^2 - 2)^2$	27)	38^2
28)	18^2	29)	29^2	30)	39^2
31)	59^2	32)	99^2	33)	88^2
34)	69^2	35)	999^2	36)	599^2

2.2 BINOMIOS CONJUGADOS

Dos binomios son conjugados si una vez se están sumando y otra vez se están restando, sin importar el orden. Así, $(a + b)$ y $(a - b)$ son binomios conjugados. Al multiplicar $(a+b)(a-b)$, se tiene que

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b\qquad\quad} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad -ab-b^2} \\ a^2 \qquad\; -b^2 \end{array}$$

de donde se deduce la siguiente regla:

El producto de dos binomios conjugados es:

** El cuadrado del primer término,*
** menos el cuadrado del segundo término.*

Ejemplo 9: $(2a - b)(2a + b)$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(2a)^2 = 4a^2$
* Cuadrado del segundo término: $(b)^2 = b^2$

Así que $(2a - b)(2a + b) = 4a^2 - b^2$

Ejemplo 10: $(6ac + 7x)(6ac - 7x)$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(6ac)^2 = 36a^2c^2$
* Cuadrado del segundo término: $(7x)^2 = 49x^2$

Así que $(6ac + 7x)(6ac - 7x) = 36a^2c^2 - 49x^2$

Ejemplo 11: $(4a^2c - b^5)(4a^2 + b^5)$

Solución:
* Cuadrado del primer término: $(4a^2c)^2 = 16a^4c^2$
* Cuadrado del segundo término: $(b^5)^2 = b^{10}$

Así que $(4a^2c - b^5)(4\ a^2 + b^5) = 16a^4c^2 - b^{10}$

Ejemplo 12: $(21)(19)$

Solución: En este caso, los números 21 y 19 se pueden descomponer en los binomios conjugados (20 + 1) y (20 - 1), convirtiéndose así su multiplicación en dos binomios conjugados. Aplicándole la misma regla se obtiene:

* Cuadrado del primer término: $20^2 = 400$
* Cuadrado del segundo término: $1^2 = 1$

Así que $(21)(19) = (20 + 1)(20 - 1) = 400 - 1 = 399$

EJERCICIO 2.2

1)	$(3b - 2ac)(3b + 2ac)$	2)	$(2ax - 9b^2)(2ax + 9b^2)$	3)	$(c^2 - 9m)(c^2 + 9m)$
4)	$(5ab + 5c^2)(5ab - 5c^2)$	5)	$(8nx^3 - 9m^2)(8nx^3 + 9m^2)$	6)	$(7c^6 - 10x^2)(7c^6 + 10x^2)$
7)	$(8x^4 - 2c^2)(8x^4 + 2c^2)$	8)	$(2x^3 + 7)(2x^3 - 7)$	9)	$(3k^4 - d^2)(3k^4 + d^2)$
10)	$(6f - c^2)(6f + c^2)$	11)	$(3x^2y^3 + 2)(3x^2y^3 - 2)$	12)	22×18
13)	$(8 - c^2)(8 + c^2)$	14)	$(11x^3y + 2)(11x^3y - 2)$	15)	99×101
16)	29×31	17)	42×38	18)	17×23
19)	101×99	20)	88×92	21)	103×97

2.3 BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Si se tienen los binomios $(a+3)$ y $(a-8)$, se puede observar que están formados por un término común, la a ("*común*" en el sentido de que se repite en ambos binomios) y los otros dos, el $+3$ y el -8 son no comunes o no repetidos.

Al realizar la multiplicación $(a + 3)(a - 8)$ para obtener el resultado, o sea, para obtener el producto, se tiene que

$$\begin{array}{l} a+3 \\ \underline{a-8} \\ a^2+3a \\ \underline{-8a-24} \\ a^2-5a-24 \end{array}$$

de donde se deduce la siguiente regla:

> ***El producto de dos binomios con un término común es:***
>
> * *El cuadrado del término común,*
> * *más la suma algebraica de los no comunes por el término común,*
> * *más el producto de los términos no comunes.*

Ejemplo 13: $(2a - 9)(2a + 1)$

Solución:
* Cuadrado del término común: $(2a)^2 = 4a^2$
* Suma algebraica (es decir, con su signo) de los no comunes $- 9 + 1 = - 8$ por el término común: $(2a)(- 8) = - 16a$
* Producto de los términos no comunes: $(- 9)(+ 1) = - 9$

Así que $(2a - 9)(2a + 1) = 4a^2 - 16a - 9$

Ejemplo 14: $(6ac + 7)(6ac - 2)$

Solución:
* Cuadrado del término común: $(6ac)^2 = 36a^2c^2$
* Suma algebraica de los no comunes $+ 7 - 2 = + 5$ por el término común: $(6ac)(+ 5) = 30ac$
* Producto de los términos no comunes: $(+ 7)(- 2) = - 14$

Así que $(6ac + 7)(6ac - 2) = 36a^2c^2 + 30ac - 14$

Ejemplo 15: $(21)(22)$

Solución: En este caso, $(21)(22)$ se puede descomponer en dos binomios con un término común, de la siguiente forma: $(21)(22) = (20 + 1)(20 + 2)$. Así que aplicándole la misma regla se obtiene:

* Cuadrado del término común: $20^2 = 400$
* Suma algebraica de los no comunes $+ 1 + 2 = + 3$, por el término común: $(+ 3)(20) = + 60$
* Producto de los términos no comunes: $(+ 1)(+ 2) = + 2$

Así que $(21)(22) = 400 + 60 + 2 = 462$

Comprobarlo con la calculadora.

EJERCICIO 2.3

1)	$(3b - 2)(3b + 1)$	2)	$(2ax - 9)(2ax - 3)$	3)	$(c^2 - 29)(c^2 + 9)$
4)	$(5ab + 2)(5ab + 5)$	5)	$(8nx^3 - 2)(8nx^3 + 9)$	6)	$(7c^6 - 10)(7c^6 - 2)$
7)	$(8x^4 - 2)(8x^4 + 1)$	8)	$(2x^3 + 7)(2x^3 + 6)$	9)	$(3k^4 - 1)(3k^4 - 2)$
10)	$(6ac^2 + 3)(6ac^2 - 1)$	11)	$(3x^2y^3 + 2)(3x^2y^3 - 9)$	12)	$(4k^2 - 6)(4k^2 - 2)$
13)	$(c^2 + 3)(c^2 - 1)$	14)	$(3y^3 + 12)(3y^3 - 9)$	15)	$(4 - 6ab)(9 - 6ab)$
16)	22×17	17)	19×18	18)	19×23
19)	33×31	20)	44×35	21)	41×34