CAPÍTULO 2

INCREMENTOS

2.1 CONCEPTO

Supóngase que se tiene una función cualquiera, por ejemplo $y = x^2$, a la cual se le asigna arbitrariamente cualquier valor inicial como $x = 3$, de donde corresponde que $y = 9$. Se quiere saber qué relación existe entre el cambio de la variable independiente x y la variable dependiente *ye*, es decir, cuando el valor de x cambia, ¿cómo varía por su parte *ye*?

La primera pregunta que surge es: ¿Lo que cambia x es lo mismo que lo que cambia *ye*? Transformando la pregunta a valores concretos: ¿Cuando x cambia en 1 la variable *ye* también cambia en 1? Para averiguarlo basta darle valores y se ve que cuando $x = 4$, se obtiene que $y = 16$.

equis cambió 1

x	3	4
y	9	16

ye cambió 7

Es decir, que mientras x cambió en 1 (pasó de 3 a 4), por su parte la *ye* varió en 7 (al pasar de 9 a 16), con lo que queda contestada la primera pregunta: Lo que cambia x no es lo que varía *ye*.

La siguiente pregunta que surge es: ¿Cada vez que la variable x cambia en 1, la variable *ye* cambia 7? Nuevamente, dando valores numéricos concretos que se concentran en una tabla se tiene lo siguiente:

equis cambió 1

x	3	4	5
y	9	16	25

ye cambió 9

De donde se ve que mientras la x cambió en 1 dos veces (al pasar de 3 a 4 primero y luego de 4 a 5), por su parte la *ye* cambió 7 y 9 (al pasar de 9 a 16 primero y luego de 16 a 25). Queda contestada la segunda pregunta. Entonces, si cada vez que x cambia en 1 la *ye* no cambia también 1, como tampoco cada vez que cambia x en 1 la *ye* no cambia 7, ¿qué relación existe entre el cambio de la variable independiente con la dependiente? La única opción que queda es encontrar una especie de fórmula que muestre esa relación de cambios.

Al cambio que sufre la variable independiente x se le llama *incremento de x*, escrito Δx, mientras que el respectivo cambio que sufre la variable dependiente *ye* se le llama *incremento de ye*, escrito Δy.

Continuando con la función ejemplo con la que se ha venido trabajando, $y = x^2$, se dice que la variable dependiente *ye* vale x^2, es decir, el valor dado inicialmente a x elevado al cuadrado. Así, si $x = 3$, entonces le corresponde $y = 9$. Cuando la x se incrementa en 1, su nuevo valor es $x = 4$. Ese nuevo valor de x es el valor que tenía inicialmente más el incremento que sufrió, esto es, ahora $x = 3 + 1$. El nuevo valor para la *ye* es 4^2, o sea $y = 16$, que es el valor inicial que tenía más el incremento de *ye*.

Lo anterior, en forma generalizada es:

Al inicio: $y = x^2$

Al final: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

Significa que el nuevo valor de la variable dependiente *ye*, después de haberse modificado el valor inicial de x es el valor que tenía al inicio más lo que se modificó la misma *ye* a partir del nuevo valor de x. Véase el ejemplo numérico que sigue.

Visto con números:

$$9 = 3^2$$

$$9 + 7 = (3 + 1)^2$$

Al inicio: O sea que para $x = 3$, $y = 9$.

Al final: Es decir que para $x = 4$, la *ye* vale 16, que es el valor inicial de *ye* más lo que se incrementa. Recordar que en la página anterior se vio que mientras la variable x pasa de 3 a 4 (se incrementa en 1), por su parte la variable dependiente *ye* pasa de 9 a 16 (se incrementa en 7).

despejando *ye* de (2):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - y \qquad (3)$$

Sustituyendo el valor de *ye* de (1) en (3):

$$\boxed{\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2} \qquad (4)$$

Es la relación buscada. Hay que recordar que lo que se estaba buscando era la relación entre el cambio de x con el cambio de ye.

Retomando el ejemplo numérico inicial, en donde hay que tener presente que $\Delta y = 7$ cuando x pasa de valer 3 a 4 y que $\Delta y = 9$ cuando x pasa de valer 4 a 5:

x	3	4	5
y	9	16	25

cuando x se incrementó en 1 al pasar de 3 a 4, por su parte la variable dependiente ye se incrementó en 7, lo cual se puede obtener aplicando la relación (4):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$
$$\Delta y = (3+1)^2 - 3^2$$
$$\Delta y = 4^2 - 3^2$$
$$\Delta y = 7$$

que es justamente el incremento de ye cuando la x pasa de valer 3 a 4. De la misma forma:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - \Delta x$$
$$\Delta y = (4+1)^2 - 4^2$$
$$\Delta y = 5^2 - 4^2$$
$$\Delta y = 9$$

el cual es exactamente el incremento de ye cuando la x pasa de valer 4 a 5.

Haciendo una generalización del procedimiento para obtener la relación que existe entre los incrementos Δx y Δy para cualquier función $y = f(x)$, se tiene que:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Ejemplo 1: Hallar el incremento Δx de la función $y = 3x^2 + x$.

Solución: $y = 3x^2 + x$

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - y \qquad \text{(despejando } \Delta y\text{)}$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - (3x^2 + x) \qquad \text{(sustituyendo } ye\text{)}$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 3x^2 - x$$

$$\Delta y = 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + x + \Delta x - 3x^2 - x$$

$$\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + x + \Delta x - 3x^2 - x$$

$$\boxed{\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x}$$

Ejemplo 2: Calcular el incremento Δx de la función $y = 5x^2 - 2x + 7$.

Solución: $y = 5x^2 - 2x + 7$

$$y + \Delta y = 5(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 7$$

$$\Delta y = 5\left(x + \Delta x\right)^2 - 2\left(x + \Delta x\right) + 7 - y$$

$$\Delta y = 5\left(x + \Delta x\right)^2 - 2\left(x + \Delta x\right) + 7 - \left(5x^2 - 2x + 7\right)$$

$$\Delta y = 5\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2\right) - 2x - 2x\Delta x + 7 - 5x^2 + 2x - 7$$

$$\Delta y = 5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 7 - 5x^2 + 2x - 7$$

$$\boxed{\Delta y = 10x\Delta x^2 + 5\Delta x^2 - 2\Delta x}$$

Ejemplo 3: Calcular el incremento Δx de la función $y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$.

Solución: $y = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

$$y + \Delta y = 2\left(x + \Delta x\right)^3 + 4\left(x + \Delta x\right)^2 - 3\left(x + \Delta x\right) - 1$$

$$\Delta y = 2\left(x + \Delta x\right)^3 + 4\left(x + \Delta x\right)^2 - 3\left(x + \Delta x\right) - 1 - y$$

$$\Delta y = 2\left(x + \Delta x\right)^3 + 4\left(x + \Delta x\right)^2 - 3\left(x + \Delta x\right) - 1 - \left(2x^3 + 4x^2 - 3x - 1\right)$$

$$\Delta y = 2\left(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3\right) + 4\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2\right) - 3x - 3\Delta x - 1 -$$
$$- 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

$$\Delta y = 2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 4x^2 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 1 -$$
$$- 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

$$\boxed{\Delta y = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 3\Delta x}$$

Nota: Obsérvese cómo debe repetirse el signo de operación, tanto al final del renglón agotado como del nuevo renglón, cuando toda la expresión, por ser tan larga, no cabe en el mismo renglón.

Ejemplo 4: Calcular el incremento Δx de la función $y=\frac{1}{x}$.

Solución: $$y=\frac{1}{x}$$

$$y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-y \qquad \text{(despejando } \Delta y\text{)}$$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x} \qquad \text{(sustituyendo } ye\text{)}$$

$$\Delta y=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} \qquad \text{(sacando común denominador)}$$

$$\Delta y=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

o bien

$$\boxed{\Delta y=\frac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}}$$

EJERCICIO 2.1

Obtener el incremento Δx de las siguientes funciones:

1) $y = 5x + 3$

2) $y = x^2 - 7x + 9$

3) $y = 6 - 9x$

4) $y = 3x - 7x^2$

5) $y = x^2 + 11x - 4$

6) $y = 8x^2 + 9x + 7$

7) $y = 5x - 2x^2 - 2$

8) $y = 5x^3$

9) $y = 2x^3 + 11x$

10) $y = 7x^3 + 3x^2 + 7x - 2$

11) $y = x^2 - x^3$

12) $y = 5x^3 + x^2 - 7$

13) $y = \dfrac{1}{x^2}$

14) $y = \dfrac{1}{2x - 1}$

15) $y = \dfrac{1}{x^2 + x}$

16) $y = \dfrac{3}{2 - 5x}$

17) $y = \dfrac{4}{2x^2 - 5}$

18) $y = \dfrac{5}{3x^2 + 2x}$