11 EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

ÍNDICE PARTICULAR

EXPONENTES

La idea de los exponentes nace con la necesidad de abreviar ciertas multiplicaciones. Como es sabido, cuando se multiplica una cantidad n por sí misma k veces, o sea

$$\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ veces}}$$

se abrevia n^k, es decir que

$$\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ veces}} = n^k$$

Por ejemplo, para no escribir $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, se abrevia 3^6, que visto a la inversa 4^5 significa $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$.

Con esta noción de que la potenciación es una multiplicación abreviada, es fácil entender por qué, por ejemplo, $a^4 \times a^5 = a^{4+5} = a^9$, es decir que al multiplicar dos cantidades con la misma base, la regla es que *se suman los exponentes,* ya que

$$\underbrace{a \times a \times a \times a}_{a^4} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a}_{a^5} = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^9$$

Entonces puede afirmarse que:

Cuando se multiplican dos cantidades con la misma base, el producto tiene la misma base con exponente igual a la suma de los dos exponentes originales.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 1: $a^5 \times a^{12}$

Solución: $a^5 \times a^{12} = a^{5+12} = a^{17}$

DIVISIÓN

Es fácil entender también por qué, a la inversa, al dividir $a^7 \div a^5 = a^{7-5} = a^2$, es decir que al dividir dos cantidades con la misma base, la regla es que *se restan los exponentes conservando la misma base,* ya que

$$a^7 \div a^4 = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}$$

$$= a^3$$

O bien, si se quiere dividir, por ejemplo, $a^4b^5 \div a^3b^3 = a^{4-3}b^{5-3} = ab^2$, ya que

$$a^4b^5 \div a^3b^3 = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times \cancel{b} \times \cancel{b} \times \cancel{b} \times b \times b}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{b} \times \cancel{b}}$$

$$= ab^2$$

Lo anterior puede sintetizar en la siguiente regla:

Cuando se dividen dos cantidades con la misma base, el cociente tiene la misma base con exponente igual a la resta de los dos exponentes originales conservando la misma base.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Ejemplo 2: $d^7 \div d$

Solución: $d^7 \div d = d^{7-1}$
$= d^6$

Ejemplo 3: $a^6b^6x^2 \div ab^3x^2$

Solución: $a^6b^6x^2 \div ab^3x^2 = a^{6-1}b^{6-3}x^{2-2}$
$= a^5b^3$

POTENCIAS DE POTENCIAS

Finalmente es fácil también entender, a partir del significado de un exponente, por qué, por ejemplo, $\left(a^4\right)^2 = a^{4\times 2} = a^8$, es decir que al elevar una potencia a otra potencia, la regla es que se multiplican los exponentes, ya que

$$\left(a^4\right)^2 = a^4 \times a^4 =$$
$$= \underbrace{a\times a\times a\times a}_{a^4} \times \underbrace{a\times a\times a\times a}_{a^4} = a^8$$

De la misma forma, si ahora se quiere elevar $\left(a^3b^2\right)^3$ basta recurrir de nuevo a la definición de potencia para deducir la manera en que debe efectuarse, en este caso elevar al cubo es la abreviatura de haber multiplicado tres veces por sí mismo.

Efectivamente,

$$\left(a^3b^2\right)^3 = \left(a^3b^2\right)\left(a^3b^2\right)\left(a^3b^2\right) =$$
$$= \left(a\times a\times a\times b\times b\right)\left(a\times a\times a\times b\times b\right)\left(a\times a\times a\times b\times b\right)$$
$$= a^9b^6$$

Se ve que la misma regla recientemente descrita, que *se suman los exponentes*, sigue aplicándose, solamente que en forma distributiva sobre cada literal.

Es decir que:

Cuando una cantidad a^m se eleva a la potencia n, se multiplican los exponentes mientras la base vuelve a ser la misma.

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$$

Ejemplo 4: $\left(a^4\right)^7$

Solución: $\left(a^4\right)^7 = a^{4\times 7} = a^{28}$

Ejemplo 5: $\left(b^3cx^9\right)^2$

Solución: $\left(b^3cx^9\right)^2 = b^{3\times 2}c^{1\times 2}x^{9\times 2} = b^6c^2x^{18}$

Ejemplo 6: $\left(x^3+y^7\right)^2$

Solución: Recordar que *un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término*. Entonces

$$\begin{aligned}\left(x^3+y^7\right)^2 &= \left(x^3\right)^2+2\left(x^3\right)\left(y^7\right)+\left(y^7\right)^2\\ &= x^{3\times 2}+2x^3y^7+y^{7\times 2}\\ &= x^6+2x^3y^7+y^{14}\end{aligned}$$

POTENCIAS DE FRACCIONES

Recurriendo nuevamente al significado de exponente, resulta sencillo deducir el resultado de elevar una fracción a un cierto exponente, para lo cual únicamente se requiere recordar que dos fracciones se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador.

Así, si se quiere efectuar, por ejemplo, $\left(\dfrac{a^5}{b^2}\right)^3$, se tiene que

$$\left(\frac{a^5}{b^2}\right)^3 = \frac{a^5}{b^2}\times\frac{a^5}{b^2}\times\frac{a^5}{b^2} = \frac{a^5\times a^5\times a^5}{b^2\times b^2\times b^2}$$

$$\frac{a^{5+5+5}}{b^{2+2+2}} = \frac{a^{15}}{b^6}$$

que no es otra cosa que el resultado de elevar el numerador al cubo y el denominador al cubo. Es decir que

Para elevar una fracción a la potencia k, se elevan separadamente tanto el numerador como el denominador a dicha potencia k.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$$

Ejemplo 7: $\left(\dfrac{a^6 x}{y^5}\right)^4$

Solución: $$\left(\frac{a^6 x}{y^5}\right)^4 = \frac{\left(a^6 x\right)^4}{\left(y^5\right)^4}$$

$$= \frac{a^{6\times 4} x^{1\times 4}}{y^{5\times 4}}$$

$$= \frac{a^{24} x^4}{y^{20}}$$

EJERCICIO 11.1

Efectuar las siguientes operaciones con exponentes:

1)	$a^6 \div a^2$	2)	$t^9 \div t^5$	3)	$q^{11} \div q^{10}$
4)	$x^{14} \div x^5$	5)	$y^{19} \div y^{11}$	6)	$c^{13} \div c^{12}$
7)	$b^{33} \div b^{17}$	8)	$a^{16} \div a^{16}$	9)	$x^{20} \div x^{20}$
10)	$\left(a^5\right)^3$	11)	$\left(x^2\right)^5$	12)	$\left(y^3\right)^3$
13)	$\left(c^7\right)^4$	14)	$\left(b^8\right)^7$	15)	$\left(t^{11}\right)^3$
16)	$\left(h^5 - w^{11}\right)^2$	17)	$\left(k^5 + j^7\right)^2$	18)	$\left(n^4 + m^3\right)^2$
19)	$\left(a^5 - b^3\right)^2$	20)	$\left(r^{11} - q^8\right)^2$	21)	$\left(a^3 + b^5\right)^3$
22)	$\left(a^3 b^2\right)^6$	23)	$\left(2d^5 e^9 f^2\right)^7$	24)	$\left(b^6 x^{10} y^2\right)^5$
25)	$\left(bf^2 h^9\right)^8$	26)	$\left(a^5 b^k\right)^3$	27)	$\left(c^{a+2} x^2\right)^{a-2}$
28)	$\left(\dfrac{a^4}{be^5}\right)^6$	29)	$\left(\dfrac{a^4 x}{b^2 y^8}\right)^{11}$	30)	$\left(\dfrac{b^5 c^7 d}{x^3 y}\right)^4$
31)	$\left(\dfrac{deh^9}{x^3 y^2}\right)^5$	32)	$\left(\dfrac{1}{4ax^5 y^3}\right)^3$	33)	$\left(\dfrac{1}{2am^4 q^9}\right)^8$

EXPONENTES NEGATIVOS

Todas las reglas de los exponentes están basadas en su propia definición de ser una multiplicación abreviada.

Un caso interesante es cuando se tiene una cantidad entre sí misma, por ejemplo, $a^{12} \div a^{12}$, que aplicándole la regla respectiva de restar los exponentes se llega a que

$$a^{12} \div a^{12} = a^{12-12} = a^{0}$$

y como se sabe que cualquier cantidad dividida entre sí misma da 1, eso significa que $a^{0} = 1$. Se puede generalizar fácilmente imaginando que cualquier número elevado a la potencia cero es igual a 1, ya que viene de dividir una cantidad entre sí misma, lo que originó una resta de exponentes iguales.

Cualquier cantidad con exponente 0 es igual a 1, ya que se trata de una división de una cantidad entre sí misma.

Aún más, si se tiene ahora, por ejemplo, $a^{2} \div a^{5}$, aplicando la regla respectiva de restar exponentes se llega a que

$$a^{2} \div a^{5} = a^{2-5} = a^{-3} \qquad \text{(A)}$$

que es lo mismo que

$$a^{2} \div a^{5} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^{3}} \qquad \text{(B)}$$

Por lo tanto las expresiones (A) y (B) deben de ser iguales, esto es que

$$a^{-3} = \frac{1}{a^{3}}$$

De aquí se desprende la siguiente regla

Si una cantidad escrita en el numerador se traslada al denominador, su exponente cambia de signo. Y a la inversa, si una cantidad escrita en el denominador se traslada al numerador, su exponente cambia de signo.

Ejemplo 8: Escribir la siguiente expresión de manera que no aparezca con exponentes negativos.

$$\frac{a^2c^{-3}}{b^{-3}x^8}$$

Solución: La literal a ya tiene exponente positivo, por lo tanto no debe hacérsele nada, si está en el numerador debe quedar allí. Lo mismo puede decirse de la literal x. En cambio, como la c tiene exponente negativo debe trasladarse al denominador para que al cambiar su signo aparezca con su exponente positivo; y como la b también tiene exponente negativo debe trasladarse al numerador para que su exponente cambie a positivo (ver figura 11.1), de manera que se obtiene

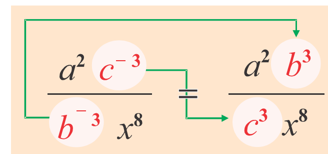

figura 11.1

$$\boxed{\frac{a^2c^{-3}}{b^{-3}x^8} = \frac{a^2b^3}{c^3x^8}}$$

Ejemplo 9: Escribir la siguiente expresión con todas las cantidades en el numerador.

$$\frac{b^{-4}d^8y^{-9}}{5a^3cx^{-1}}$$

Solución: Todas las cantidades del denominador, tomadas una por una (5, a^3, c, x^{-1}), deben cambiar de signo en su exponente al trasladarse al numerador, en tanto que todas las numerador deben quedar iguales, ya que no se trasladan. Verlo en la figura 11.2. Nótese en el caso del coeficiente 5, lo mismo que la literal c, que aunque inicialmente no tienen exponente escrito, en realidad lo tienen como $+1$, por eso al trasladarse "hacia arriba" aparecen con exponente menos uno.

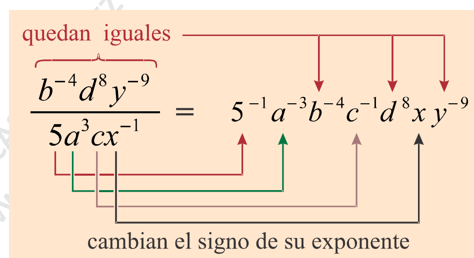

figura 11.2

Entonces

$$\boxed{\frac{b^{-4}d^8y^{-9}}{5a^3cx^{-1}} = 5^{-1}a^{-3}b^{-4}c^{-1}d^8xy^{-9}}$$

NOTA: Un error muy frecuente que comete el alumno en casos como el del ejemplo anterior es que al trasladar el 5 del denominador al numerador, en vez de cambiar el signo de su exponente a 5^{-1}, cambia el signo de la cantidad misma a (-5).

EJERCICIO 11.2

Escribir las siguientes cantidades

a) sin exponentes negativos;
b) sin denominadores (todo en el numerador):

1) $\dfrac{a^{-5}d^2}{b^{-1}x}$

2) $\dfrac{b^4 f^{-1} g}{ac^{-6}}$

3) $\dfrac{b^2c^{-1}x}{a^{-1}d^4 y}$

4) $\dfrac{-3}{a^{-1}b^7x^{-4}}$

5) $\dfrac{-5b^{-5}}{a^{-2}x^2}$

6) $\dfrac{c^{-1}g^5}{-3b^{-3}}$

7) $\dfrac{-2^{-2}}{5^{-5}}$

8) $\dfrac{4^{-1}}{2a^{-1}bc^{-4}}$

9) $\dfrac{3b^3c^2}{-2a^2x}$

10) $\dfrac{-3b^{-3}c^3}{a^{-1}d^5}$

11) $\dfrac{c^5d^2}{-3a^{-3}b^3}$

12) $\dfrac{3^{-1}a^{-2}}{b^{-1}c^{-5}}$

13) $\dfrac{b^{-2}d^{-1}g^{-6}}{2^{-1}a^{-1}}$

14) $\dfrac{xy^{-4}}{-4a^{-4}b^4}$

15) $\dfrac{d^{-2}h^{-2}}{-2^{-2}a^{-2}b^{-2}}$

16) $\dfrac{-3^{-3}b^{-3}}{a^{-3}c^{-3}x^{-3}}$

17) $\dfrac{-a^2b^{-2}}{x^2y^{-2}}$

18) $\dfrac{-b^{-4}d^{-4}}{-4a^{-4}x^{-4}}$

EXPONENTES FRACCIONARIOS

En matemáticas frecuentemente se da el hecho llamado *rebasar su definición,* que consiste en que dada la definición de alguna operación, ésta llega a pasar más allá en virtud de que operacionalmente se obtienen también resultados congruentes.

Por ejemplo, la multiplicación nace de la necesidad de abreviar ciertas sumas. Efectivamente, se sabe que para no escribir, por ejemplo, $3+3+3+3+3+3$, se abrevia como 3×6. En otras palabras, cuando se tiene 4×5, se sabe de inmediato que en realidad se pretende sumar $4+4+4+4+4$.

Se puede definir entonces la multiplicación como una suma abreviada.

Cuando se tiene 2.01×3 la definición de multiplicación continúa vigente, pues significa simplemente que se quiere hacer la suma $2.01 + 2.01 + 2.01$; sin embargo, ¿qué significa la multiplicación 3.17×1.96? ¿Se puede 3.17 sumar uno punto noventa y seis veces?. Desde el punto de vista de la definición de multiplicación carece de sentido, pero operacionalmente es congruente con las multiplicaciones que se apegan a la propia definición.

Así, pues, la multiplicación entre cantidades ambas no enteras es un caso de una operación que rebasa su definición. Otro caso es el de las funciones trigonométricas, las que nacen a partir de triángulos rectángulos. Por ejemplo, se descubrió que al tener un triángulo rectángulo con un ángulo de 25^0, al dividir el lado *ye* entre el lado x (verlo en la figura 11.3) siempre daba el mismo valor 0.466307658 sin importar si el triángulo fuese grande, mediano o chico. Ese valor es el que corresponde a *tan* 25. Los valores de las funciones seno, coseno y tangente que vienen dados en tablas (ahora en la calculadora) nacieron de triángulos rectángulos, es decir, su definición inicial fue dada para ángulos agudos o a lo más el recto. El seno se define como el cateto opuesto entre la hipotenusa y eso solamente tiene sentido en un triángulo rectángulo.

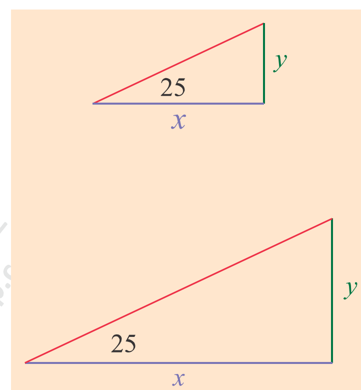

figura 11.3

Sin embargo, con el tiempo se rebasó está definición obteniendo valores para las funciones *seno*, *coseno*, *tangente*, etc. para todos los ángulos mayores de 90 grados. Un estudio más a fondo se hará en el segundo semestre.

Entendida la idea de *rebasar su propia definición*, el caso que nos ocupa es el de la potenciación. También con el tiempo fue rebasada. Se recordó al inicio de este tema que la idea de los exponentes nace con la necesidad de abreviar ciertas multiplicaciones. Cuando se multiplica una cantidad n por sí misma k veces, se abrevia n^k. Analizado desde la propia definición, tiene sentido hablar de 4^3 como la abreviación de $4 \times 4 \times 4$, o bien de 1.34^2 como la abreviación de 1.34×1.34, pero ¿qué significa $3^{1.2}$? Desde la propia definición, carece de sentido, pero al rebasar dicha definición, adquiere un sentido y un significado congruente operacionalmente con las potencias que se apegan a la definición.

Como ya se dijo, al elevar una potencia a otra potencia la regla es que se multiplican los exponentes. De manera que si

$$\left(a^3\right)^2 = a^{3\times 2} = a^6 ,$$

al aplicarle la operación inversa *raíz cuadrada* también deberá aplicarse la operación inversa al exponente, es decir, dividirlo entre dos, esto es que

$$\sqrt{a^6} = a^{6\div 2} = a^3$$

Por lo tanto, en congruencia con este procedimiento,

$$\sqrt{a^5} = a^{5\div 2} = a^{5/2}$$

o bien

$$\sqrt[3]{a^7} = a^{7\div 3} = a^{7/3}$$

De donde se deduce la siguiente regla para exponentes fraccionarios:

En un exponente fraccionario, el numerador representa la potencia a la que está elevada la base y el denominador el índice del radical que lo afecta.

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ejemplo 10: Escribir con radical la expresión $x^{1/4}$.

Solución: Como el denominador es el índice del radical, significa que debe escribirse adentro de una raíz cuarta, mientras que el numerador es la potencia de x; de manera que

$$x^{1/4} = \sqrt[4]{x^1} = \sqrt[4]{x}$$

Ejemplo 11: Escribir con radical la expresión $x^{3/8}$.

Solución: Como el denominador es el índice del radical, significa que debe escribirse adentro de una raíz octava, mientras que el numerador 3 es la potencia de x; de manera que

$$\boxed{x^{3/8}=\sqrt[8]{x^3}}$$

Ejemplo 12: Escribir con radical la expresión $\left(3x^5y\right)^{3/10}$

Solución: El denominador 10 indica que todo debe ir adentro de un raíz décima y el numerador 3 que debe estar elevado al cubo, de manera que

$$\boxed{\left(3x^5y\right)^{3/10}=\sqrt[10]{\left(3x^5y\right)^3}}$$

Ejemplo 13: Escribir con exponente fraccionario la expresión $\sqrt[4]{b^7}$

Solución: El exponente 7 es el numerador y el índice del radical 4 es el denominador, de manera que

$$\boxed{\sqrt[4]{b^7}=b^{7/4}}$$

Ejemplo 14: Escribir con exponente fraccionario la expresión $\sqrt[6]{\left(7bx^2y^8+a^3\right)^5}$

Solución: El exponente fraccionario debe tener denominador 6 (que es el índice del radical) y numerador 5 (que es el exponente al que está elevado todo el paréntesis), de manera que

$$\boxed{\sqrt[6]{\left(7bx^2y^8+a^3\right)^5}=\left(7bx^2y^8+a^8\right)^{5/6}}$$

EJERCICIO 11.3

Escribir con radical las expresiones que estén con exponente fraccionario; o con exponente fraccionario las que estén en radical

1)	$x^{2/3}$	2)	$y^{4/3}$	3)	$a^{1/6}$	4)	$b^{3/2}$
5)	$c^{7/5}$	6)	$(3x^2y)^{1/3}$	7)	$(6a^7bc^3)^{2/5}$	8)	$(3bd^6x^2)^{4/3}$
9)	$4(c^2xy^3)^{7/3}$	10)	$7(abc^2)^{5/8}$	11)	$b(2a + 2x^4)^{1/4}$	12)	$(x^2 - y^3)^{8/7}$
13)	$x^2(x^2 - xy)^{2/5}$	14)	$ab^4(3 + 2xy^7)^{6/7}$	15)	$(a + b)(a - b)^{2/9}$	16)	$x^{1/2} + y^{1/2}$
17)	$a^{1/3} - b^{2/3}$	18)	$3a^{1/2} + 2a^{1/3}$	19)	$4x^{2/3} - 3y^{3/2}$	20)	$3ab^{1/2} - xy^{2/3}$

21) $\sqrt{x^7}$

22) $\sqrt[5]{y^2}\ \sqrt[5]{y^2}$

23) $\sqrt[7]{b^5}$

24) $\sqrt[8]{b}$

25) $\sqrt[5]{x^2y}$

26) $\sqrt[3]{a^2b^7}$

27) $\sqrt[4]{\left(a+b^2\right)^3}$

28) $\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}$

29) $\sqrt[6]{\left(b^3+5x\right)^5}$

30) $\sqrt[5]{x^6}\cdot\sqrt[4]{y^3}$

31) $\sqrt[5]{ab^3}\cdot\sqrt[3]{x^5y}$

32) $\sqrt[7]{\left(2x\right)^2}\cdot\sqrt[8]{\left(x+y^2\right)^9}$

33) $6\sqrt[5]{\left(4+xy\right)^4}$

34) $\sqrt[5]{x^2+\sqrt{x^3}}$

35) $\sqrt[4]{xy-\sqrt[4]{\left(a-b\right)^{11}}}$

36) $\sqrt[3]{\left(a+b\right)^2}+\sqrt[3]{\left(a-b\right)^2}$

37) $\sqrt[4]{\left(2-x^2\right)^3}+\sqrt[3]{\left(3+y^6\right)^7}$

38) $\sqrt[7]{\left(a^2+b\right)^6}+\sqrt[3]{b^3-a^2}$

39) $\dfrac{x^5+\sqrt{x}}{y^7-\sqrt{y}}$

40) $\dfrac{a^3-\sqrt[6]{a^2+8}}{b^3+\sqrt{b^2-8}}$