

FUNCIONES IMPLÍCITAS

11.1 FUNCIONES IMPLÍCITAS

En el curso de Precálculo del 4º semestre se vieron diferentes clasificaciones de las funciones, entre ellas las *funciones explícitas* y las *funciones implícitas*. Recordando: Una función está escrita en forma *explícita* cuando su variable dependiente (por lo general, la *ye*) está despejada. Los siguientes ejemplos se refieren a funciones escritas en forma *explícita*:

$$y = 3x^2 - 11x - 9$$

$$y = x^2 \tan(x^3 - 22)$$

$$y = e^{6x^2} (\tan x - \cos 2x)$$

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^6 - 9x}}$$

Si por el contrario, su variable dependiente (por lo general, la *ye*) no está despejada, se dice que está escrita en forma *implícita*. Los siguientes ejemplos muestran casos de funciones escritas en forma *implícita*:

$$x^3 - y^3 = xy - 8$$

$$\tan(x - 4y) = 3x + y^4$$

$$5x^2 - 7xy + 9x - y^2 + 22y - 6 = 0$$

$$y = \text{arc sen } \sqrt{x^4 - y^2}$$

Una función escrita en forma implícita puede estar así por dos razones: una, porque la variable dependiente (por lo general, la *ye*) sea algebraicamente imposible despejarla, como cuando aparece como parte de algún argumento al mismo tiempo que no parte de algún argumento. Por ejemplo, en $4y = \text{sen}(2x - y^2)$ la variable dependiente *ye* aparece como parte del argumento del *seno* y además como no argumento en $4y$. La otra razón es simplemente porque así convino escribirla, como en $x^2 + 3y + 5 = 0$ (se podría despejar la *ye*)

Para obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función implícita se emplean las mismas fórmulas y las mismas reglas de derivación estudiadas hasta ahora, en donde debe tenerse solamente el cuidado de tratar a la variable dependiente *ye* exactamente como una variable. Dicho de otra forma, la variable dependiente *ye* ocupará el lugar de la *u* en las fórmulas.

Por ejemplo, para derivar y^3 debe utilizarse la fórmula (6) de la potencia vista en la página 69, en donde $u = y$ y $n = 3$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} y^3 = \underbrace{3}_{n} \underbrace{y}_{u} \underbrace{^{3-1}}_{n-1} \underbrace{\frac{d}{dx} y}_{\frac{du}{dx}}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx} y^3 = 3y^2 \frac{dy}{dx}$$

Para derivar, por ejemplo, $x^6 y^3$ debe emplearse la fórmula (7) del producto uv vista en la página 77, en donde $u = x^6$ y $v = y^3$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} x^6 y^3 = \underbrace{x^6}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx} y^3}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{y^3}_v \underbrace{\frac{d}{dx} x^6}_{\frac{du}{dx}}$$

Para derivar y^3 debe seguirse el procedimiento visto en la página anterior. Por lo tanto,

$$= x^6 \left[3y^2 \frac{d}{dx} y \right] + y^3 [6x^5]$$

$$\frac{d}{dx} x^6 y^3 = 3x^6 y^2 \frac{dy}{dx} + 6x^5 y^3$$

En general, para obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ de cualquier función implícita deben derivarse

ambos miembros de la igualdad aplicando las fórmulas ya estudiadas y luego despejar $\frac{dy}{dx}$, lo cual

puede detallarse en la siguiente regla:

Para derivar funciones implícitas:

- 1) *Derivar ambos miembros de la igualdad, aplicando las mismas fórmulas antes vistas.*
- 2) *Despejar $\frac{dy}{dx}$, para lo cual:*
 - a) *Escribir en el lado izquierdo de la igualdad todos los términos que contengan a la derivada y del lado derecho todos los términos que no la contengan.*
 - b) *Factorizar en el lado izquierdo $\frac{dy}{dx}$.*
 - c) *Despejar $\frac{dy}{dx}$, dividiendo en el lado derecho el factor que le multiplica.*

Ejemplo 1: Obtener $\frac{dy}{dx}$ si $5xy^7 - y^3 = 9x + 4y$

Solución: **Paso 1:** Aplicando el operador derivada en ambos miembros de la igualdad

$$\frac{d}{dx}(5xy^7 - y^3) = \frac{d}{dx}(9x + 4y)$$

$$\frac{d}{dx} 5xy^7 - \frac{d}{dx} y^3 = \frac{d}{dx} 9x + \frac{d}{dx} 4y$$

$$\frac{d}{dx} (5xy^7) - \frac{d}{dx} y^3 = \frac{d}{dx} 9x + \frac{d}{dx} 4y$$

son de la forma:

uv

u^n

$c \frac{du}{dx}$

$$\underbrace{5x}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx} y^7}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{y^7}_{v} \underbrace{\frac{d}{dx} 5x}_{\frac{du}{dx}} - \underbrace{3}_{n} \underbrace{y}_{u} \underbrace{y^{3-1}}_{n-1} \underbrace{\frac{d}{dx} y}_{\frac{du}{dx}} = 9 + 4 \frac{dy}{dx}$$

$$5x \left[7y^6 \frac{dy}{dx} \right] + y^7 [5] - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 9 + 4 \frac{dy}{dx}$$

$$35xy^6 \frac{dy}{dx} + 5y^7 - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 9 + 4 \frac{dy}{dx}$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo todos los términos que contengan a la derivada y del lado derecho los que no lo contengan:

$$35xy^6 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} = 9 - 5y^7$$

Paso 2b: Factorizando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} (35xy^6 - 3y^2 - 4) = 9 - 5y^6$$

Paso 2c: Despejando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9 - 5y^6}{35xy^6 - 3y^2 - 4}$$

Ejemplo 2: Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$ si $y = x \ln y + \text{sen } 3x$

Solución: Debe tenerse cuidado con casos como éste. Aparentemente la variable y está despejado por aparecer del lado izquierdo como único término, pero realmente no está despejada por el hecho de volver a aparecer en el lado derecho. Por lo tanto, es una función implícita.

Paso 1: Derivando en ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y &= \frac{d}{dx} (x \ln y + \text{sen } 3x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \underbrace{x \ln y}_{uv} + \frac{d}{dx} \underbrace{\text{sen } 3x}_{\text{sen } u} \end{aligned}$$

son de la forma

uv

$\text{sen } u$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\frac{d}{dx} \ln y}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{\ln y}_{v} \underbrace{\frac{d}{dx} x}_{\frac{du}{dx}} + \underbrace{\cos 3x}_{\cos u} \underbrace{\frac{d}{dx} 3x}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \left[\frac{\frac{d}{dx} y}{y} \right] + \ln y [1] + \cos 3x [3]$$

$$\frac{dy}{dx} = x \left[\frac{dy}{dx} \frac{1}{y} \right] + \ln y + 3 \cos 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \ln y + 3 \cos 3x$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo los términos que contienen a la derivada y del derecho los que no la contienen

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \ln y + 3 \cos 3x$$

Paso 2b: factorizando la derivada:

$$\frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{x}{y} \right) = \ln y + 3 \cos 3x$$

Paso 2c: y finalmente despejando la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln y + 3 \cos 3x}{1 - \frac{x}{y}}$$

Por las reglas de escritura, como no debe dejarse el resultado como una fracción compleja, es decir, fracción sobre fracción, entonces para quitar el denominador parcial **ye** basta multiplicar numerador y denominador por **ye**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\ln y + 3 \cos 3x)}{y\left(1 - \frac{x}{y}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y + 3y \cos 3x}{y - x}$$

Ejemplo 3: Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $3x^2 + 5y^3 - 4x - y + 3 = 0$

Solución: **Paso 1:** Derivando en ambos lados:

$$\frac{d}{dx} 3x^2 + \frac{d}{dx} 5y^3 - \frac{d}{dx} 4x - \frac{d}{dx} y + \frac{d}{dx} 3 = \frac{d}{dx} 0$$

$$6x + 15y^2 \frac{dy}{dx} - 4 - \frac{dy}{dx} = 0$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo los términos que contienen a la derivada y del derecho los que no la contienen:

$$15y^2 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 4 - 6x$$

Paso 2b: Factorizando la derivada:

$$\frac{dy}{dx}(15y^2 - 1) = 4 - 6x$$

Paso 2c: y finalmente despejando la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 6x}{15y^2 - 1}$$

EJERCICIO 11.1

Obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

1) $4xy^8 = 5x^2 - 7y$

3) $y^2 - y = x^2 - x$

5) $2xy - 7x + 6y = y^3 - 8x^5$

7) $y = 2x^3 + 7y^6$

9) $y = e^x + e^y$

11) $\ln y + \ln x = y - x$

13) $\operatorname{sen} xy = xy$

15) $\tan(x^2 - 3y) = x^2 + 3y$

17) $\sqrt{x - y} = xy$

2) $6y + 3x = 9 - 4x^2y^3$

4) $11x^6y - 11xy^6 = 3x - 12$

6) $x^3 - y^4 = 4x^6y^2$

8) $y = y^4 - x^4$

10) $y = \frac{2x}{3y} - x^7$

12) $\ln xy = xy$

14) $\cos(2x - 3y) = 2x - 3y$

16) $\frac{x}{y} - \frac{y^2}{x^2} = 0$

18) $y \ln x + x \ln y = 0$