CAPÍTULO 10

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

10.1 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Al derivar una función cualquiera $y = f\left(x\right)$ se genera otra función $y' = g\left(x\right)$, como por ejemplo en el caso de que $y = x^2$, al derivarla se obtiene la nueva función $y' = 2x$ que se llama la primera derivada. De hecho, todo el trabajo realizado hasta este momento en el presente curso ha estado encaminado a obtener la primera derivada.

Pero la primera derivada se puede volver a derivar, generándose una nueva función llamada ahora la *segunda derivada ;* y si ésta última se vuelve a derivar, se obtiene la *tercera derivada,* y así sucesivamente. Es decir, la segunda derivada resulta de derivar la primera derivada, que en simbología matemática puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Para abreviar la simbología anterior, la segunda derivada se escribe como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

La segunda derivada es la derivada de la derivada, no la derivada *por* la derivada. Son cosas diferentes. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces la primera derivada es $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. En la siguiente tabla se muestra la diferencia entre lo que resulta de la derivada de la derivada y de la derivada por la derivada:

Derivada de la derivada:	$\frac{d}{dx}3x^2 = 6x$
Derivada por derivada:	$\left(3x^2\right)\left(3x^2\right) = 9x^4$

Todo lo antes dicho es aplicable para la tercera derivada, la cuarta derivada, etc.

Ejemplo 1: Obtener la segunda derivada de la función $y = 5x^2 - 7x + 13$.

Solución: La primera derivada es $\frac{dy}{dx} = 10x - 7$

La segunda derivada se obtiene derivando la primera derivada, es decir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(10x - 7)$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 10}$$

Ejemplo 2: Calcular la tercera derivada de la función $y = sen\ 6x$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 6\ cos\ 6x \qquad \text{(Primera derivada)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\ 36\ sen\ 6x \qquad \text{(Segunda derivada)}$$

$$\boxed{\frac{d^3y}{dx^3} = -\ 216\ cos\ 6x} \qquad \text{(Tercera derivada)}$$

Ejemplo 3: Investigar cuál es la segunda derivada de la función $y = e^{2x}\ cos\ 6x$.

Solución: Para la primera derivada debe emplearse la fórmula (7) del producto uv, vista en la página 77:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{2x}}_{u}\underbrace{\left(-\ 6\ sen\ 6x\right)}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{cos\ 6x}_{v}\underbrace{\left(2e^{2x}\right)}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\ 6\,e^{2x}\ sen\ 6x + 2\,e^{2x}\ cos\ 6x \qquad \text{(Primera derivada)}$$

Para calcular la segunda derivada nuevamente debe utilizarse la misma fórmula del producto uv para cada término:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \underbrace{-6e^{2x}\left[6\cos 6x\right] + sen\,6x\left[-12e^{2x}\right]}_{\text{derivada del 1}^{er}\text{ producto}} + \underbrace{2e^{2x}\left[-6\,sen\,6x\right] + \cos 6x\left[4e^{2x}\right]}_{\text{derivada del 2}^{o}\text{ producto}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -36e^{2x}\cos 6x - 12e^{2x}sen\,6x - 12e^{2x}sen\,6x + 4e^{2x}\cos 6x$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -32e^{2x}\cos 6x - 24e^{2x}sen\,6x}$$

EJERCICIO 10.1

Calcular la segunda derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 4x^6 + 11x^5 - 7x^3 - x + 9$

2) $y = 7x - 8$

3) $y = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$

4) $y = (5x - 8)^7$

5) $y = \cos 8x$

6) $y = \tan 2x$

7) $y = \ln x^2$

8) $y = \dfrac{3}{x^2 - 5}$

9) $y = \sqrt{3x + 13}$

10) $y = \sqrt[5]{x^2 - 1}$