1 NÚMEROS REALES

ÍNDICE PARTICULAR

1. Los números reales 2
Recorrido histórico 2
1.1 Los números naturales 2
1.2 Los números enteros 3
1.3 Los números racionales 4
1.3.1 Trasformación de forma fraccionaria a decimal 4
1.3.2 Trasformación de forma decimal a fraccionarial 6
1.4 Los números irracionales 8
ejercicio 1.1 9
2. La jerarquía de las operaciones 10
ejercicio 1.2 12
3. Tanto por ciento 12
3.1 Cálculo de porcentajes 13
3.1.1 Por fórmula 13
3.1.2 Por regla de tres 15
3.1.3 Porcentajes agregados 16
ejercicio 1.3 17
4. Razones y proporciones 18
ejercicio 1.4 20

1. LOS NÚMEROS REALES

Los *números reales* son todos los números que la generalidad de las personas conocen y con los que hacen todas sus cuentas. Un estudiante de este nivel solamente conoce a los números reales, como por ejemplo

$$26;\ 5.07;\ \frac{2}{7};\ (-45);\ \sqrt{20}\ \text{, etc.}$$

porque hay otros números más avanzados que hasta ahora no ha utilizado ni conoce y que solamente se utilizan a niveles de ingenierías.

RECORRIDO HISTÓRICO

Para comprender mejor la clasificación que existe dentro de los números reales es conveniente hacer un recorrido histórico de cómo y por qué la humanidad pensante fue creando los números. A cada una de las siguientes clasificaciones que se van a estudiar se les llama *sistema numérico* o *sistema de números* o *sistema de numeración*.

1.1. LOS NÚMEROS NATURALES

El primer sistema de numeración que el hombre inventó fue el de los números naturales, o sea los enteros positivos: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty\}$.

> *Los números naturales surgieron por la necesidad del hombre de contar inicialmente cosas enteras.*

Resulta elemental que no pudo suceder de otra manera, ya que es muy obvio que lo primero que tuvo necesidad de contar el hombre fueron cosas enteras, como, por ejemplo, cuántas vacas tenía, o cuántos dedos había en su mano, o cuántos hijos tenía, etc. Por esa razón, ya que el invento de estos números se dio en forma natural o espontánea, su sistema ha sido bautizado como el de "los naturales". Por una parte, los demás sistemas de numeración tienen como base a éste o a otros antecesores, pero el sistema de números naturales no tiene antecesor.

Así, pues, lo primero que tuvo necesidad el humano respecto de los números fue simplemente contar. De hecho, los inventó para eso, para contar en forma directa. Pero en su proceso histórico de evolución surgieron hombres inteligentes que no se conformaron con eso, sino que captaron la posibilidad de hacer cuentas también con esos números inventados inicialmente para contar nada más.

La primera operación inventada fue la suma. El gran problema del hombre en todas las épocas frente a sus números, o sea con los números hasta entonces conocidos, ha sido que al inventar operaciones con ellos a veces se pueden efectuar y a veces no, lo que indica que la deficiencia está en el sistema de números, no en la operación misma. Dicho en otras palabras, cuando hay una operación que el humano puede efectuar a veces sí y a veces no es que le faltan números por conocer, dentro de los cuales están las soluciones de lo que en ese instante no puede obtener.

Cuando el hombre apenas había inventado los números naturales y las operaciones básicas, se topó algún día con lo dicho en el párrafo anterior, es decir que ciertas operaciones no podía efectuarlas porque no había números, dentro de los que conocía, que fueran su solución.

Así, por ejemplo, para hacer $3 + 5$ no había problema, pues el resultado era uno de los números que conocía, en este caso el 8. De igual forma, para hacer la resta $14 - 10$ fácilmente encontraba en el número 4 (que era parte de su numeración) la respuesta. Sin embargo, cuando por primera vez se planteó $2 - 9$ se encontró en serios aprietos para dar contestación, pues ninguno de los números que hasta entonces manejaba eran solución a esa operación. Ténganse en cuenta que hoy sabemos que $2 - 9$ es (-7) porque conocemos los números negativos, pero cuando hablamos de que la humanidad apenas iba en los números naturales, ese número negativo no existía, por lo tanto no se podía ni siquiera pensar en él. Y si el (-7) no existía, no se podía pensar que fuera la solución de $2 - 9$.

Esto le hizo ver a los pensantes de aquellas épocas que había alguna falla en el sistema de numeración, ya que unas restas sí podía efectuarlas y otras no. Inventó entonces el hombre más números: ¿cuáles?, aquellos que solucionaran las restas a las que no podía hallarles respuesta. De manera que a los números conocidos les agregó los negativos llegando históricamente al *sistema de los números enteros*.

1.2 LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros surgieron por la necesidad de y para dar solución a las restas de un número natural menos otro mayor que el primero.

El *sistema de los números enteros* es $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... , \infty\}$

Aquí es muy importante entender que al pasar al sistema de números enteros no se destruyó lo que ya existía, sino que simplemente a lo ya inventado se le aumentó más. Eso quiere decir que los *números naturales* son a su vez *naturales* y *enteros*.

Con los números enteros ya se podía efectuar cualquier resta, pues ahora $4 - 20$ encontraba su solución en el número (-16) ya conocido. Sin embargo, volvieron a aparecer deficiencias al haber operaciones que mientras unas sí podían efectuarse, otras no. Era el caso, por ejemplo, de la división $30 \div 5$ que tenía su solución en el número 6 ya conocido; pero en cambio divisiones del tipo $26 \div 7$ eran insolubles, ya que ningún número de los conocidos hasta ese momento eran su respuesta.

Volvió a repetirse el proceso: aquello era un indicativo de que el sistema de numeración conocido o empleado era deficiente, o sea, le faltaban números. Se inventaron entonces aquellos que dieran respuesta a las divisiones del tipo del ejemplo anterior. Así se llegó al sistema de los *números racionales* (aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros). De manera que la división $26 \div 7$ encontró solución.

1.3 LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales surgieron por la necesidad de y para dar solución a las divisiones de un número entero entre otro entero no submúltiplo del primero.

El sistema de los números racionales es $\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{p}{q},\ q \neq 0 \right\}$, que se lee: "son todos los números x tales que x es igual al cociente de p entre q, siendo q diferente de cero". Se acostumbra también expresar esta definición así: $\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{p}{q},\ q \neq 0,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \right\}$ en donde lo agregado significa que p pertenece al conjunto de los *números enteros* y que q pertenece al conjunto de los *números enteros*, pero esto último es redundante puesto que al surgir este conjunto de *números racionales* lo único que se conocía hasta entonces eran los números enteros $\mathbb{Z}$.

Debe entenderse que "inventar números" en este proceso histórico significa -o significó- agregarle otros a los ya conocidos, pero nunca eliminar los conocidos para sustituirlos por otros nuevos. Y ese "agregar" fue siempre en función de la operación que no podía dar solución. Por lo tanto, los *números naturales* son también *enteros* y *racionales*. Los *números enteros* son también *racionales*.

1.3.1 TRANSFORMACIÓN DE FORMA FRACCIONARIA A DECIMAL

Aquí da inicio también la escritura de números con decimales. Antes, con los números enteros no tenía sentido. De tal manera que al existir ya el número $\dfrac{2}{5}$ que solucionaba la división de 2 entre 5, se encontró que otra forma de escribirlo era como 0.4 (en forma decimal).

Un número racional escrito en forma decimal tiene una propiedad muy interesante, que todos tienen parte periódica, es decir, que después del punto decimal tienen uno o más dígitos que se repiten en forma indefinida. Cuando el número que se repite es el cero se dice que la división es exacta.

Lo anterior es fácil entenderlo. Por ejemplo, si se tiene el racional $\dfrac{2}{7}$ para pasarlo a forma decimal se hace la división

$$\begin{array}{r|l} & \;0.2 \\ \hline 7 & 2.0000 \\ & \;\;6 \end{array}$$

primer residuo parcial

continuando con esta división:

$$\begin{array}{r|l} & \;0.28 \\ \hline 7 & 2.0000 \\ & \;\;60 \\ & \;\;\;\;4 \end{array}$$

segundo residuo parcial

Si se continúa indefinidamente con esta división el número máximo de residuos parciales que pueden salir es siete, que son (0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6). Si sale cero en ese momento la división es exacta. Si sale siete o mayor que siete está mal hecha la división puesto que cabe un entero más en el último dígito escrito en el cociente. De tal manera que llegará un momento en que hayan salido todos los residuos posibles y al continuar con la división éstos comenzarán a repetirse en el mismo orden en que aparecieron inicialmente. Obviamente que los dígitos del cociente también comenzarán a repetirse y allí aparece la parte periódica.

Para indicar la parte periódica en un número decimal se escribe una rayita encima de dicha parte periódica. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$$ (un dígito periódico)

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}$$ (dos dígitos periódicos)

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$ (un dígito periódico después de un dígito no periódico)

$$\frac{5}{13} = 0.\overline{384615}$$ (seis dígitos periódicos)

$$\frac{239}{792} = 0.301\,\overline{76}$$ (dos dígitos periódicos después de tres dígitos no periódicos).

Nótese que la parte periódica puede empezar inmediatamente después del punto decimal o después de algunos dígitos no periódicos, como en el caso de un sexto (tercer ejemplo). Cuando la parte periódica son ceros, éstos no se escriben.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0.5\overline{0}$$

$$\frac{3}{4} = 0.75\overline{0}$$

no se escriben así, sino simplemente de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

1.3.2 TRANSFORMACIÓN DE FORMA DECIMAL A FRACCIONARIA

La idea es obtener dos expresiones distintas, a partir de la original, tales que después del punto decimal quede exclusivamente la parte periódica, para que al restar una de otra se anule dicha parte periódica.

Por ejemplo $2.\overline{71}$

Se nombra *equis* al número anterior, o sea

$$x = 2.\overline{71} \qquad (1)$$

Como tiene dos dígitos periódicos, la expresión (1) se multiplica por 10^2, o sea por 100:

$$100x = 271.\overline{71} \qquad (2)$$

Esto resulta así porque no hay que olvidar que la original (1) es lo mismo que $x = 2.71\overline{71}$.

Entonces restando la expresión (2) de la (1) se obtiene que

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 271.\overline{71} \\ -\quad x & = & 2.\overline{71} \\ \hline 99x & = & 269 \end{array}$$

Finalmente despejando la x:

$$x = \frac{269}{99}$$

El número decimal $2.\overline{71}$ es igual a la fracción $\dfrac{269}{99}$.

Otro ejemplo: Hallar a cuánto equivale en forma fraccionaria el número decimal $10.34\overline{8}$

Nombrar como *equis* al número anterior:

$$x = 10.34\overline{8} \qquad (3)$$

Multiplicando la igualdad original (3) por 100, se consigue situar el punto decimal justo a donde comienza la parte periódica, obteniendo así la primera de las dos igualdades requeridas:

$$100x = 1034.\overline{8} \qquad (4)$$

Multiplicando ahora la igualdad original (3) por 1000:

$$1000x = 10348.\overline{8} \qquad (5)$$

Y restando la igualdad (5) menos la (4) para eliminar la periodicidad:

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 10348.\overline{8} \\ -\quad 100x = & 1034.\overline{8} \\ \hline 900x = & 9314 \end{array}$$

despejando x :

$$x = \frac{9314}{900} = \frac{4657}{450}$$

Significa que $10.34\overline{8} = \dfrac{4657}{450}$

1.4 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Recordando que junto con los números el hombre fue creando operaciones que realizar con ellos, algún día se le ocurrió la raíz cuadrada. Su definición apareció a partir del inverso de la multiplicación de un número por sí mismo. De manera que si de 6×6 obtenía 36 , resultaba inicialmente muy simple que la raíz cuadrada de 36 fuese 6 .

Sin embargo, de manera semejante a las operaciones descritas en los párrafos anteriores, algún día debió preguntarse: ¿Y la raíz cuadrada de 32 cuánto es? Y no halló respuesta, porque dentro de los números conocidos hasta ese momento (los racionales, o sea los escritos como el cociente de dos enteros), no había ninguno que elevado al cuadrado diera 32 . Ninguna fracción elevada al cuadrado da 32. Y volvió a repetirse la historia: faltaban números a su sistema conocido.

Los números irracionales surgieron por la necesidad de y para dar solución a las raíces no exactas.

Inventó ahora *los irracionales*, entre los que están principalmente todas las raíces (cuadradas, cúbicas, cuartas, etc.) no exactas. Con esos nuevos números ya se tenían respuestas a $\sqrt{17}$, o bien $\sqrt{88}$, también $\sqrt[3]{13}$, igualmente $\sqrt[5]{20}$, etc.

Los números irracionales (del latín *in* = no; *ratio* = calcular dividiendo), o sea que no son racionales, no son, por lo tanto, la división de un entero entre otro y, por lo tanto, tampoco tienen parte periódica al escribirse en forma decimal. O lo que es lo mismo, tienen un número infinito de dígitos decimales sin periodicidad.

La unión de los *números racionales* con los *irracionales* dio como resultado el *sistema de numeración de los números reales*, los que representados geométricamente en la recta numérica la ocupaban totalmente sin dejar ya ningún espacio vacío.

En síntesis:

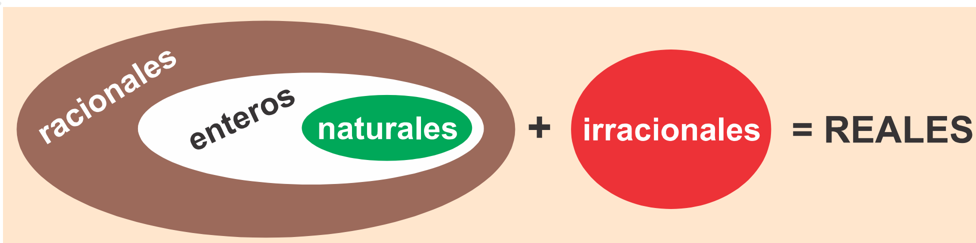

figura 1.1

EJERCICIO 1.1

Indicar a qué conjunto numérico pertenece cada uno de los siguientes números. Si pertenecen a más de un conjunto, mencionar a todos los conjuntos a los que pertenece.

1)	46	2)	$\dfrac{3}{17}$	3)	$\sqrt{105}$	4)	-8
5)	146	6)	$\sqrt[6]{88}$	7)	$-\dfrac{5}{3}$	8)	-65
9)	$\dfrac{18}{12}$	10)	$\sqrt{57}$	11)	$\dfrac{7}{17}$	12)	123

Transformar a forma fraccionaria los siguientes números racionales escritos en forma decimal periódica:

13)	$2.\overline{4}$	14)	$1.3\overline{7}$	15)	$1.\overline{37}$	16)	$0.65\overline{1}$
17)	$4.\overline{234}$	18)	$4.2\overline{34}$	19)	$4.23\overline{4}$	20)	$2.\overline{085}$

2. LA JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

Seguramente hubo un tiempo en el que el humano tenía que hacer operaciones como ésta:

$$3 + 5 \times 2$$

lo que generaba confusión por existir ambigüedad. Algunos podrían haber dicho que el resultado de la anterior operación es 16, pero para otros era 13. Sin existir alguna regla del modo en que debe hacerse esta operación no había manera de definir cuál era el resultado correcto. Porque sin esa regla tan correcto era pensar que “el resultado de tres más cinco debe multiplicarse por dos” como también “tres sumarlo al resultado de cinco por dos”.

Esa regla que eliminara la ambigüedad fue la *jerarquía de las operaciones*.

En el idioma universal de las Matemáticas se estableció entonces una prioridad de unas a otras operaciones, es decir, una jerarquía. Dicha jerarquía, de mayor a menor, es:

* la multiplicación y su operación inversa (la división),
* la suma y su operación inversa (la resta),
* En general, cualquier operación y su inverso tienen la misma jerarquía.

lo que significa que primero debe hacerse la multiplicación antes que la suma (o sus inversos).

Por ejemplo, $4 + 6 \times 2$, matemáticamente las operaciones no deben realizarse en el orden en que están escritas, sino conforme a la jerarquía (prioridad) de operaciones. Como la multiplicación es de mayor jerarquía respecto de la suma, primero debe efectuarse la multiplicación y luego la suma. De manera que el resultado correcto es 16, no 20. O sea, significa que el cuatro debe sumarse al resultado de seis por dos.

Las operaciones inversas tienen la misma jerarquía. Cuando se tienen varias operaciones de la misma jerarquía, el orden en que se efectúen ellas no altera el resultado final. La suma y la resta tienen el mismo nivel, de manera que es lo mismo realizar primero las sumas y luego las restas que a la inversa. La multiplicación y la división tienen el mismo nivel entre ellas.

Cuando se tiene una agrupación, o sea algo entre paréntesis, primero debe obtenerse el resultado de lo que está escrito adentro de dicho paréntesis. Por ejemplo:

$$4 \times (1 + 7) = 4 \times 8 = 32$$

Cuando hay un signo de agrupación adentro de otro signo de agrupación, debe efectuarse primero la operación encerrada en el paréntesis más interior. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 4 + [2 + (1 + 7) + 5 \times (12 \div 6)] &= 4 + [2 + 8 + 5 \times 2] \\ &= 4 + [2 + 8 + 10] \\ &= 4 + 20 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Cuando se tiene una potencia, por ejemplo $3 + 2^4$, como $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, por la jerarquía de operaciones primero se efectúa la multiplicación y luego la suma que es exactamente lo mismo que hacer primero la potencia y luego la suma. El resultado correcto es 19.

El estudiante debe tener muy clara otra regla, aunque pertenezca más a una regla de escritura: Un exponente afecta solamente a la base, o sea a aquello sobre lo que se escribió encima. Analícense los siguientes ejemplos:

$2 + 3^4$ el exponente está escrito arriba del tres, por lo tanto afecta solamente al tres. El tres es la base. Lo anterior vale 83.

$(2 + 3)^4$ el exponente está escrito arriba del paréntesis, por lo tanto afecta a todo el paréntesis. La base es el paréntesis, o sea su contenido porque un paréntesis vacío no tiene sentido. Lo anterior vale 625.

xy^3 El exponente está escrito arriba de la variable ye, por lo tanto solamente la ye es la que se eleva al cubo. La ye es la base.

EJERCICIO 1.2

Obtener el resultado de las siguientes operaciones:

1) $8 \times 5 + 4 - 3 \times 2$

2) $8 \times 5 + 4 - 3 \times 2 + 6 \div 3$

3) $150 - \left[\left(\sqrt{25} - 1\right) - \left(2^3 - 3\right)\right]$

4) $150 - \left[\left(\sqrt{25} - 1\right) - \left(2 + 3\right)^2\right]$

5) $\sqrt{81} \div 3 + 2^3 \div 4 - 4 \times \left(2^3 + 1\right)$

6) $\sqrt{81} \div 3 + 2^3 \div 4 - 4 \times \left(2 + 1\right)^3$

7) $\left[\left(2 + 1\right)^3 + \left(2^3 + 1\right)\right] \times 2$

8) $\left[\left(2 + 1\right)^3 \times \left(2^3 + 1\right)\right] + 2$

3. TANTO POR CIENTO

Se llama *tanto por ciento* o *porcentaje* de un número a una o varias de las cien partes en que se puede dividir dicho número, es decir, uno o varios centésimos de un número. El signo de tanto por ciento es %.

Todo porcentaje se puede expresar como fracción o como número decimal.

Es frecuente que el estudiante a veces quede un poco confuso con algún concepto por no saber interpretar correctamente el significado de una palabra. En este caso la preposición "por".

Y es que es muy común, no solamente en el estudiantado, sino entre la gente en general, olvidar que las palabras suelen tener dos o más acepciones o significados y eso los lleva a aferrarse a darle el significado más frecuente o usual y caer en el error.

Por ejemplo, cuando se dice que un coche viaja a 90 kilómetros por hora, no entiende por qué se escribe como si fuera división km/h cuando se está diciendo "*por hora*". El problema está en que la preposición "por" allí no se está empleando con el significado de multiplicación, sino con el significado de "cada", o sea 90 kilómetros cada hora.

Algo semejante podría ocurrir con el tanto *por* ciento. Esa preposición "*por*" tiene el significado "*de cada*", pero no de multiplicación. Entonces el 25% (veinticinco *por* ciento) significa 25 *de cada* cien.

Cabría citar un ejemplo de la mala interpretación de las palabras, aunque nada tenga qué ver con esto del porcentaje. Es coloquial decir "está bien mal". Entonces no faltan los que lo corrigen y afirman que no se dice así porque es una contradicción, o está bien o está mal, pero no ambas al mismo tiempo. Y sin embargo está bien dicho. Lo que sucede es que la palabra "bien" tiene 17 significados diferentes y uno de ellos es *mucho, bastante, harto, muy*, como en *el pastel está bien sabroso*. Así que decir *está bien mal* es equivalente a decir *está muy mal*, *está bastante mal*.

Otro caso muy frecuente es cuando alguien al médico le llama *doctor*. Salen los correctores de oficio a decir que no es el *doctor* Fulano, sino el médico Fulano, porque *doctor* es el que hizo grado académico de doctorado. Falso: Entre los significados de la palabra *doctor* está el de sinónimo de médico en el diccionario de la Real Academia Española.

Con lo anterior se desea que al estudiante le quede claro que *tanto por ciento* tiene el significado de *tanto de cada cien*.

Un ejemplo muy simple: Si en una escuela el siete por ciento está reprobado y hay 300 alumnos en dicha escuela, lo que se está afirmando es que por cada cien alumnos existen siete reprobados, o sea que en la escuela hay en total 21 reprobados.

3.1 CÁLCULO DE PORCENTAJES

Una manera es reducir a centésimos el porcentaje dado y luego multiplicarlo por el todo, o sea por la cantidad de la que se le quiere obtener ese porcentaje.

3.1.1 POR FÓRMULA

Sintetizándolo en una simple fórmula:

$$\frac{tc}{100} \times T = p$$

en donde:

tc = tanto por ciento
T = el todo
p = porcentaje obtenido del todo.

Ejemplo 1: Obtener el 20% de 425.

Solución: Primero se reduce 20% a centésimos haciendo $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Ahora el todo, o sea 425 se multiplica por $\frac{1}{5}$ para obtener

$$425 \times \frac{1}{5} = \frac{425 \times 1}{5}$$

$$= 85$$

El 20% de 425 es 85.

O bien, utilizando la fórmula, en la que:

$$tc = 20$$
$$T = 425$$

$$\frac{tc}{100} \times T = p$$

$$\frac{20}{100} \times 425 = 85$$

Ejemplo 2: ¿Qué porcentaje de 728 es 182?

Solución: Ahora lo desconocido es el tanto por ciento, así que en la fórmula

$$\frac{tc}{100} \times T = p$$

$$\frac{tc}{100} \times 728 = 182$$

$$tc \times 728 = 18200$$

$$tc = \frac{18200}{728}$$

$$tc = 25\%$$

182 es el 25% de 728.

Ejemplo 3: ¿1120 es el 56% de qué número?

Solución: Ahora lo desconocido es el todo, así que en la fórmula

$$\frac{tc}{100} \times T = p$$

$$\frac{56}{100} \times T = 1120$$

$$T = \frac{1120 \times 100}{56}$$

$$T = 2000$$

1120 es el 56% de 2000.

3.1.2 POR REGLA DE TRES

Las respuestas a los problemas de porcentajes también se pueden obtener por una regla de tres simple, considerando que el todo es el 100%.

Ejemplo 4: ¿Cuánto es el 40% de 660?

Solución: El todo es 660 que representa el 100%, por lo que puede plantearse la siguiente regla de tres:

$$\frac{660}{100\%} = \frac{x}{40\%}$$

$$\frac{660 \times 40\%}{100\%} = x$$

$$x = 264$$

El 40% de 660 es 264.

Ejemplo 5: ¿Qué porcentaje de 360 es 126?

Solución: El todo es 360 que representa el 100%, por lo que puede plantearse la siguiente regla de tres:

$$\frac{360}{100\%} = \frac{126}{x}$$

$$x = \frac{126 \times 100}{360}$$

$$x = 35\%$$

126 es el 35% de 360.

Ejemplo 6: ¿567 es el 70% de qué cantidad?

Solución: El todo, que representa el 100%, ahora es la incógnita, por lo que puede plantearse la siguiente regla de tres:

$$\frac{x}{100\%} = \frac{567}{70\%}$$

$$x = \frac{567 \times 100\%}{70\%}$$

$$x = 810$$

567 es el 70% de 810.

3.1.3 PORCENTAJES AGREGADOS

Cuando a una cantidad se le desea agregar un porcentaje de ella misma, el resultado final se puede obtener de dos maneras:

Primera forma: Calcular primero la cantidad equivalente al porcentaje dado y luego sumarlo a la cantidad inicial.

Segunda forma: Multiplicar la cantidad inicial por lo que resulte de sumar 100 más el tanto por ciento y todo eso entre cien. Como dividir entre cien es simplemente recorrer el punto decimal dos lugares a la izquierda, lo anterior siempre dará *uno punto* (1.) y la parte decimal después de este punto es el porcentaje convertido a centésimos. Con el siguiente ejemplo se aclarará esta segunda forma.

Ejemplo 7: Si en un pueblo de 10500 habitantes aumenta este año su población el 2%, ¿Cuántos habitantes hay ahora?

Solución: Por la primera forma, obteniendo el 2% de 10500:

$$\frac{10500}{100\%} = \frac{x}{2\%}$$

de donde

$$x = 210$$

O sea que ahora hay 10500 + 210 =10710 habitantes.

Por la segunda forma: el 2% convertido a centésimos es $2 \div 100 = 0.02$; entonces la cantidad inicial 10500 debe multiplicarse por 1.02; o lo que es lo mismo, (100 + 2) ÷ 100 = 1.02:

$$10500 \times 1.02 = 10710 \text{ habitantes.}$$

Ejemplo 8: Una persona le presta dinero a otra cobrándole el 6% de intereses. Ésta al final acaba pagándole $143 100.00 ya con todo e intereses. ¿Cuánto fue lo que le prestaron?

Solución: Como $143 100 es la suma de la cantidad inicial más los intereses, es el proceso inverso al problema anterior y, por lo tanto, ahora se divide entre (100 + 6) ÷ 100 = 1.06, es decir que

$$\frac{143100}{1.06} = 135000$$

La cantidad que le prestaron al 6% de intereses fue de $135 000.00.

EJERCICIO 1.3

1) ¿Cuánto es el 88% de 2035?

2) ¿Qué porcentaje de 440 es 115?

3) ¿1005 es el 76% de qué cantidad?

4) Si 390 es el 83% de cierta cantidad, ¿cuánto es el 62% de dicha cantidad?

5) Un mueble cuesta $5 500.00 al que se le hace el 5% de descuento y después a la cantidad resultante se le agrega el 3% por impuestos. ¿Cuánto se paga por dicho mueble?

6) En un laboratorio de análisis clínicos hacen el 15% de descuento a las personas de la tercera edad. Una mujer pagó \$2300.00 después del descuento. ¿Cuál es el precio real de ese estudio?

7) Por el alza de precios, un mueblero que vende un sillón en \$2900.00 le aumenta el 7% a dicho precio. ¿Cuánto cuesta ahora?

8) Si al precio de un objeto se le hace un descuento del 5% y a lo obtenido se le vuelve a rebajar el 5%, ¿es lo mismo que rebajar desde el inicio el 10%? Pruébalo de las dos maneras con el número 200.

9) El año pasado una escuela tenía 540 alumnos y este año aumento el 15% la población estudiantil. ¿Cuántos alumnos hay este año en dicha escuela?

4. RAZONES Y PROPORCIONES

En matemáticas la palabra *razón* significa el cociente de dos números que se quieren comparar. O sea, dos cantidades que se quieren comparar para ver cuántas veces cabe uno en el otro, o lo que es lo mismo cuántas veces contiene uno al otro.

Por ejemplo, si se desean comparar el 20 con el 4, visto desde el 20 hacia el 4 sería para ver cuántas veces el 20 contiene al 4: Lo contiene 5 veces. O si es visto desde el 4 hacia el 20 sería para ver cuántas veces el 4 cabe en el 20: Cabe 5 veces. En cualquiera de ambos casos la razón de 20 a 4 es 5.

Como se dijo en el primer párrafo, la *razón* es un cociente, el cual se puede representar por medio de una fracción o por medio del conocido operador ($\div$), aunque la más utilizada es la de fracción.

El numerador de una razón se llama el *antecedente*; el denominador se llama el *consecuente*.

Si la razón de dos cantidades cualesquiera a y b es igual a la razón de otros dos números cualesquiera c y d, se obtiene una *proporción* al igualarlas:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por ejemplo, la razón de 20 a 4 es 5. La razón de 30 a 6 es 5. Tienen la misma razón, por lo tanto se pueden igualar

$$\frac{20}{4} = \frac{30}{6}$$

La igualdad anterior es una *proporción*. En esta proporción el 20 y el 6 se llaman *extremos* y el 4 y el 30 se llaman *medios*. Generalizando:

extremos *medios*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

medios *extremos*

Una proporción se puede escribir de dos formas:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{o bien} \qquad a : b :: c : d$$

y se leen: *a* es a *b* como *c* es a *d*.

La propiedad fundamental de toda proporción es:

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Si los medios son iguales la proporción es *continua* y a esta cantidad se le llama *media proporcional*. Por ejemplo, $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, el 4 es la media proporcional.

EJERCICIO 1.4

Calcular el valor de la incógnita x en las proporciones siguientes:

1)	$4 : 5 :: x : 20$	2)	$6 : x :: 20 : 30$	3)	$3 : 9 :: 9 : x$
4)	$x : 4 :: 42 : 24$	5)	$2 : x :: x : 50$	6)	$4 : x :: x : 75$
7)	$\dfrac{x}{14} = \dfrac{14}{49}$	8)	$\dfrac{x}{5} = \dfrac{20}{10}$	9)	$\dfrac{7}{x} = \dfrac{28}{12}$

10) Se sabe que toda recta paralela a uno cualquiera de los lados de un triángulo divide a los otros dos lados en partes proporcionales. Si en la siguiente figura el lado AC mide 80 cm. y el lado BC mide 65 cm. ¿Cuánto mide el segmento EC sabiendo que CF = 46.58 cm?

11) En la misma figura, si el segmento EF = 43 cm. ¿Cuánto mide el lado AB?

12) En el mismo triángulo, ¿Cuánto miden los segmentos AE y BF?

13) En el mismo triángulo, si se mueve el segmento EF hasta que BF = 24, en ese momento ¿Cuánto mide el segmento AE?

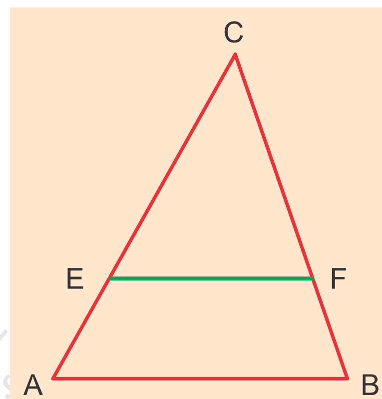

figura 1.2

El lado AB es paralelo con el segmento EF.
AC = 80 cm.
BC = 65 cm.