2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

ÍNDICE PARTICULAR

2

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

2.1 UNA PROPIEDAD DE LOS TRIÁNGULOS

Los triángulos rectángulos tienen dos propiedades muy importantes. De la primera que a continuación se va a analizar nacen las llamadas Funciones Trigonométricas.

Hágase la siguiente práctica:

En el triángulo de la figura 2.1 medir con una regla con la máxima precisión posible la longitud del lado y y anotarlo en el cuaderno. Después hacer lo mismo con el lado x. Finalmente dividir el valor obtenido para y entre el valor de x y anotarlo. Con dos decimales es suficiente.

Ahora medir igualmente con la máxima precisión posible la longitud del lado m y anotarlo en el cuaderno. Después hacer lo mismo con el lado n. Finalmente dividir el valor obtenido para m entre el valor de n y anotarlo con dos decimales.

El estudiante debe obtener el mismo resultado en ambos casos. O casi el mismo resultado. La pequeña diferencia que le salga entre el primer caso y el segundo se debe a que el ojo humano no puede detectar décimas ni centésimas de milímetro que seguramente tienen esas longitudes.

Esa es la primera propiedad importantísima que tienen los triángulos rectángulos, que mientras sus ángulos agudos no varíen, la división entre dos de sus lados de forma correspondiente siempre da el mismo resultado sin importar el tamaño del triángulo.

Obsérvese que en el ejercicio anterior, los ángulos agudos no cambiaron, lo que cambió solamente fue el tamaño del primer triángulo ABC medido respecto del segundo ADE. El valor aproximado de la división del lado vertical entre el lado horizontal debe ser de 0.714 sin importar el tamaño del triángulo.

OJO: Si el ángulo agudo cambia, la división del lado vertical entre el lado horizontal ya no da 0.714. El ángulo con vértice en A mide aproximadamente 35.5º, por lo tanto el otro ángulo agudo mide 54.5º porque el tercer ángulo siempre debe ser de 90º, de lo contrario dejaría de ser triángulo rectángulo y todo lo que se está afirmando tiene validez exclusivamente para triángulos rectángulos.

Otra cosa importante: La división del lado vertical entre el horizontal siempre dará 0.714 solamente que el ángulo agudo A mida 35.5º, no importa el tamaño de los lados, sean más grandes o más chicos.

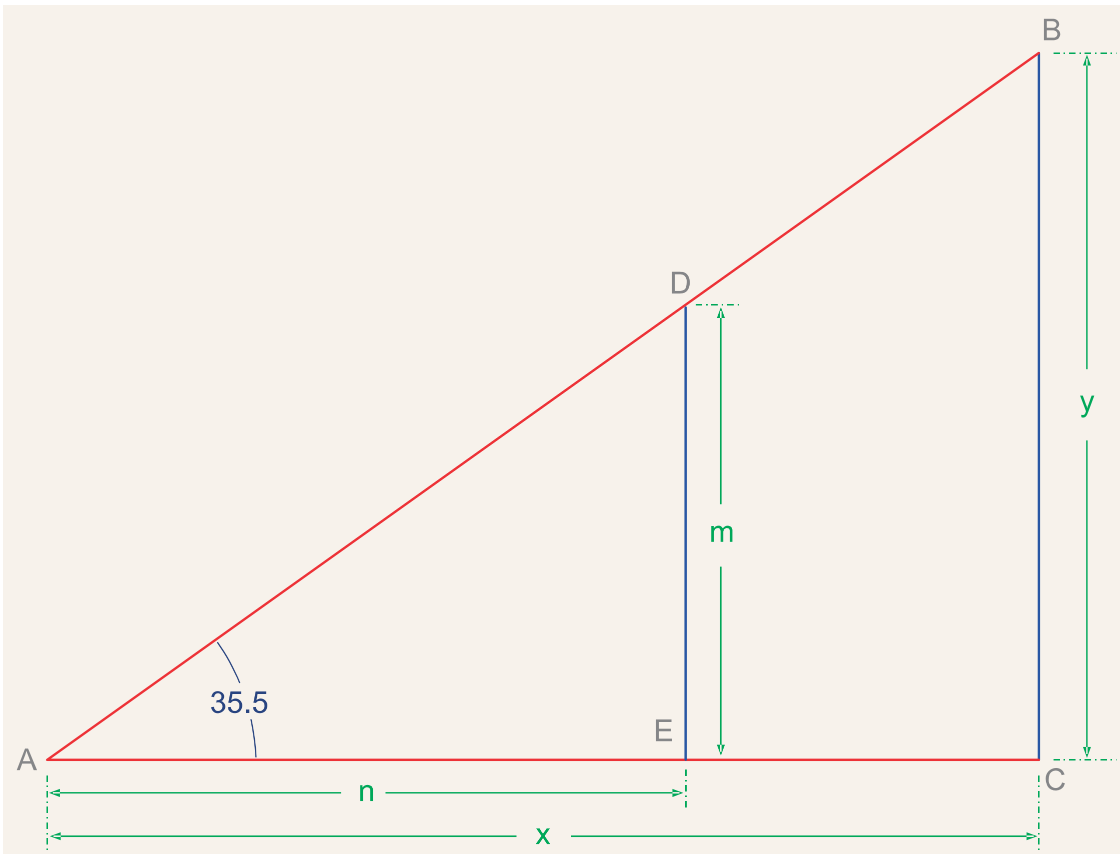


figura 2.1

Entonces el estudiante debe deducir el resultado del siguiente ejercicio: Suponga que en el triángulo ABC de la figura 2.1 se coloca un nuevo punto F sobre el lado horizontal a una distancia de 11 cm. del vértice A y desde ese punto F traza una vertical para construir un nuevo triángulo "adentro" del triángulo ABC. ¿Cuánto deberá medir el nuevo lado vertical? La respuesta la debe obtener el alumno sin hacer la construcción del nuevo triángulo, sino deduciendo qué operaciones debe ejecutar para llegar a la respuesta. Después comprobarlo haciendo ahora sí la construcción.

Si el ángulo A cambia, por ejemplo a 23.2º, la división del lado vertical y entre el valor del lado horizontal x dará otro valor diferente a 0.714 que siempre se obtenía en la figura 2.1, pero ese nuevo valor será siempre el mismo sin importar el tamaño del triángulo, a condición de que dicho ángulo A de 23.2º permanezca constante.

¿Cuánto vale esa división? El alumno debe repetir la práctica que hizo con el triángulo de la figura 2.1 pero ahora sobre el triángulo de la figura 2.2.

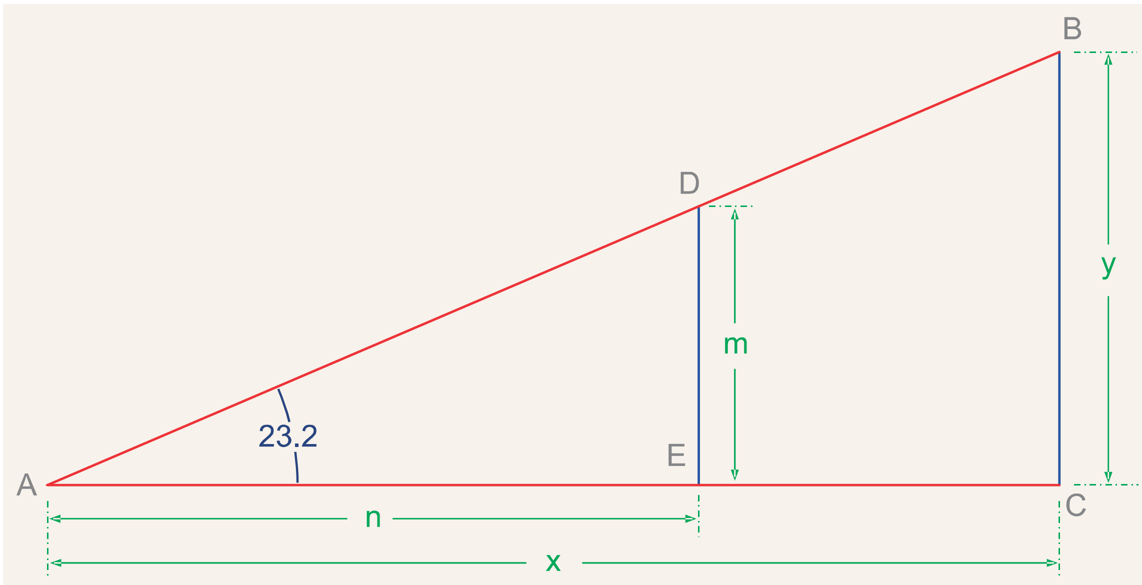


figura 2.2

El valor aproximado que el estudiante debe obtener al dividir con la máxima precisión posible la longitud del lado y entre la longitud del lado x de la figura 2.2 es de 0.428. Igualmente al dividir la longitud del lado m entre la longitud del lado n de la misma figura.

Los matemáticos de la antigüedad al descubrir esta propiedad en los triángulos rectángulos se dieron a la tarea de anotar los valores de las divisiones de un lado entre otro, obtenidas para cada ángulo diferente.

Metidos en esta tarea, el siguiente problema a resolver era que al existir seis posibles divisiones de un lado entre otro, ¿cómo identificar una división de la otra? De allí surgieron las llamadas *Funciones Trigonométricas*.

2.2 DEFINICIONES

Téngase en cuenta que todo lo que se mencione en este capítulo tiene validez exclusivamente para triángulos rectángulos.

CATETOS: Son los lados que forman el ángulo recto. En la figura 2.3 los lados x e y son los catetos.

HIPOTENUSA: Es el lado más grande, el que está “enfrente” del lado recto. En la figura 2.3 el lado r es la hipotenusa.

ÁNGULO ADYACENTE (a un lado): Es el que está situado en uno de los extremos de dicho lado. En la figura 2.3, el ángulo adyacente al lado y es β y el adyacente al lado x es α.

LADO ADYACENTE (a un ángulo): Es el que forma parte del ángulo. En los triángulos rectángulos se llama cateto adyacente. En la figura 2.3, el cateto adyacente al ángulo α es x. El cateto adyacente al ángulo β es y.

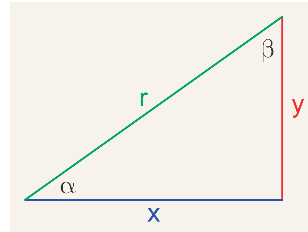


figura 2.3

ÁNGULO OPUESTO: Ángulo opuesto a un lado es el que está situado "enfrente" a dicho lado. En la figura 2.3, el ángulo opuesto al lado x es β. El ángulo opuesto al lado y es α.

LADO OPUESTO: Lado opuesto a un ángulo es el que está "enfrente" del ángulo. En los triángulos rectángulos se llama cateto opuesto. En la figura 2.3, el cateto opuesto al ángulo β es x. El cateto opuesto al ángulo α es y.

Las seis divisiones posibles son:

$$\frac{y}{r} \quad ; \quad \frac{x}{r} \quad ; \quad \frac{y}{x} \quad ; \quad \frac{x}{y} \quad ; \quad \frac{r}{x} \quad ; \quad \frac{r}{y}$$

Un problema al que se enfrentaron los matemáticos de la antigüedad fue cómo identificar cada una de esas divisiones, porque a cualquier persona se le puede ocurrir en vez de llamarles a los lados x, y, r, ponerles, por ejemplo, a, b y c, como se muestra en la figura 2.4. Entonces la división que para una persona podría ser $\frac{y}{r}$ para otra persona sería $\frac{b}{c}$. Y aún más, aunque alguien le pusiera a los lados del triángulo x, y, r, sucedería en muchos casos que dichos identificadores quedaran en otro orden o lugar de como están en la figura 2.3, es decir, que la equis quedara en donde está la r y así con las demás.

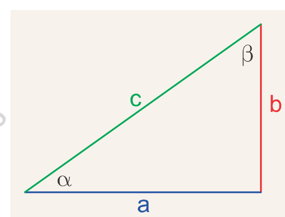


figura 2.4

Queda claro entonces que no se pueden identificar las divisiones posibles antes mencionadas a través del nombre particular (la letra) que se le ponga a cada triángulo a cada dibujo, sino por nombres universales. Estos nombres universales son *hipotenusa* para el lado opuesto al ángulo recto y *catetos* para los lados que forman el ángulo recto.

De esta manera, la división que en la figura 2.3 es $\frac{y}{r}$ y en la figura 2.4 es $\frac{b}{c}$, habría que llamarla $\frac{cateto}{hipotenusa}$. Pero ¿cuál cateto? Obsérvese que el cateto y es simultáneamente cateto adya cente y cateto opuesto, dependiendo respecto de qué ángulo se considere. Si es respecto del ángulo α se trata de cateto opuesto; si es respecto del ángulo β se trata de cateto adyacente.

De esta manera las seis divisiones posibles de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo y su forma de abreviarlas se muestran en la siguiente tabla:

FIGURA 2.3	RESPECTO DEL ÁNGULO α	NOMBRE DE LA DIVISIÓN	ABREVIATURA
$\frac{y}{r}$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	seno	*sen* α
$\frac{x}{r}$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	coseno	*cos* α
$\frac{y}{x}$	$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	tangente	*tan* α
$\frac{x}{y}$	$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	cotangente	*cot* α
$\frac{r}{x}$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	secante	*sec* α
$\frac{r}{y}$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	cosecante	*csc* α

Las anteriores son las llamadas *funciones trigonométricas*, que en síntesis son:

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad ; \quad \text{coseno} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad ; \quad \text{cotangente} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \quad ; \quad \text{cosecante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

2.3 NACIMIENTO DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS

En virtud de que para cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo la división de las longitudes de dos de sus lados resulta el mismo valor sin importar el tamaño del triángulo, estos valores los comenzaron a recopilar los matemáticos de la antigüedad en unas tablas, llamadas tablas trigonométricas.

Obsérvese en la página anterior que el seno y la cosecante son recíprocos; que el coseno y la secante son recíprocos; y que la tangente con la cotangente también son recíprocos. Por esa razón es suficiente tener los valores solamente del seno, coseno y de la tangente. Así es como aparecieron inicialmente en las tablas y actualmente en las calculadoras.

La tabla siguiente es un ejemplo sencillo de cómo, aproximadamente, hicieron esa recopilación de datos. En este ejemplo están los valores desde cero grados hasta nueve solamente, pero aquellos matemáticos lo hicieron desde cero grados hasta noventa grados.

ÁNGULO (º)	SENO	COSENO	TANGENTE
0	0	1.0000	0
1	0.0174	0.9998	0.0174
2	0.0348	0.9993	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0697	0.9975	0.0699
5	0.0871	0.9961	0.0874
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1218	0.9925	0.1227
8	0.1391	0.9902	0.1405
9	0.1564	0.9876	0.1583
10	0.1736	0.9848	0.1763

En la actualidad ya no utilizan las tablas en virtud de que con las calculadoras se obtienen con mayor exactitud y facilidad dichos valores.

2.4 USO DE LAS CALCULADORAS

En las calculadoras existen tres teclas para obtener los valores de las funciones trigonométricas, que son *sin* para el seno (del inglés, *sine*), *cos* para el coseno y *tan* para la tangente, como se muestra en la figura 2.5.

figura 2.5

Cuando se emplea la calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas es importante tenerla en la unidad angular adecuada, casi siempre en grados sexagesimales (D).

Existen tres unidades angulares: El grado sexagesimal, el radián y el grado centesimal. La calculadora le hace saber al usuario en qué unidad está a través de una letra que aparece en la parte superior de la pantalla: Para grados sexagesimales una D (del inglés, *Degree*), para radianes con una R y para grados centesimales con una G (ver figura 2.6). En el capítulo 8 de este libro se estudiarán los radianes.

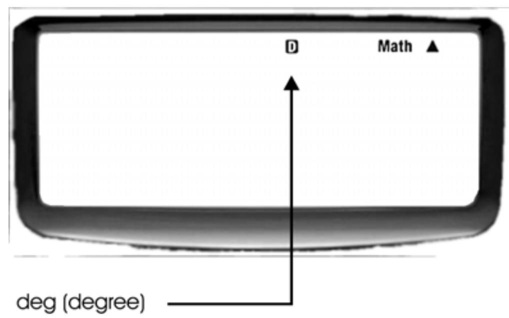


figura 2.6

Para cambiar de una unidad angular a otra por lo general debe buscarse la tecla MODE, casi siempre ubicada en la parte superior del teclado, que es la que cambia a los diferentes modos de hacer cálculos. Oprimir esta tecla las veces que sea necesario hasta que aparezcan las medidas angulares. Un ejemplo se muestra en la figura 2.7.

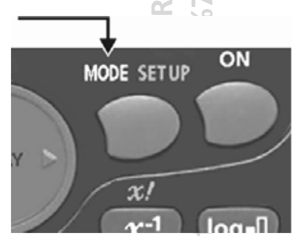
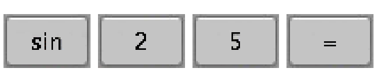


figura 2.7

Si el alumno teclea en su calculadora, por ejemplo,



aparecerá en su pantalla algo semejante a la figura 2.8

figura 2.8

¿Qué significa? Tres cosas:

* Primero: Que al tratarse de la función *seno*, por definición se refiere a la división hecha del cateto opuesto entre la hipotenusa.

* Segundo: Respecto del ángulo de 25º los catetos toman los nombres de *cateto opuesto* y de *cateto adyacente*. En la figura 2.9 se ve que el lado y es el cateto opuesto a 25º. Recordar que el significado de “opuesto” en un triángulo tiene el sentido de “enfrente de”.

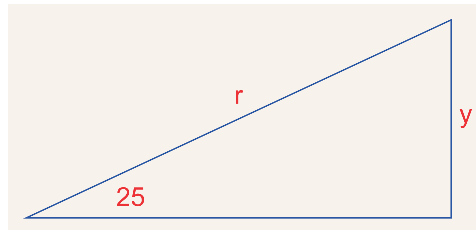


figura 2.9

* Tercero: Que en cualquier triángulo rectángulo, cuando uno de sus ángulos agudos mida 25º siempre la división de la longitud del cateto opuesto entre la hipotenusa, sin importar el tamaño del triángulo, va a dar 0.4226182617. El alumno puede verificar que en el triángulo de la figura 2.9 de manera aproximada, si mide el cateto opuesto y la hipotenusa y los divide le va a dar un valor cercano al antes mencionado. No puede el estudiante llegar con exactitud al valor mostrado en la calculadora porque no es posible que mida la longitud de los lados con precisión de décimas, centésimas ni milésimas de milímetros. Inclusive, al hacer la impresión del libro pudo variar un poco el valor de 25º.

2.5 APLICACIONES

Todo lo anterior lleva a la aplicación más importante de la trigonometría básica que consiste en poder obtener cuánto miden los otros dos lados de un triángulo rectángulo conociendo el valor de uno de sus lados y el de uno de sus ángulos. O bien, poder obtener el valor de sus ángulos agudos conociendo solamente dos de sus lados.

Ejemplo 1: Obtener el valor de los lados desconocidos del siguiente triángulo de la figura 2.10:

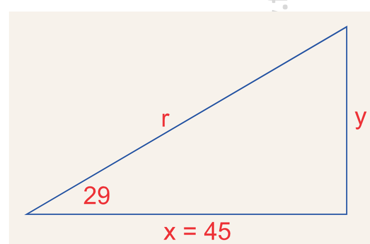


figura 2.10

Solución: Se sabe que la división del lado $x = 45$ entre el lado r, cuando el ángulo mida 29º, siempre va a dar el mismo valor. Esa división es el cateto adyacente entre la hipotenusa y se llama coseno.

Por lo tanto, buscando en la calculadora se obtiene que $\cos 29 = 0.87461$ o sea que

$$\frac{45}{r} = 0.87461 .$$

despejando r:

$$45 = 0.87461\,r$$

Como la cantidad que se despeja siempre debe escribirse del lado izquierdo porque leemos de izquierda a derecha, se llega a que

$$r = \frac{45}{0.87461}$$

$$\boxed{r = 51.45}$$

Con el mismo razonamiento, se sabe que la división del lado y entre el lado x = 45 , cuando el ángulo mida 29º, siempre va a dar el mismo valor. Esa división es el cateto opuesto entre el cateto adyacente y se llama tangente. Por lo tanto, buscando en la calculadora se obtiene que $tan\,29 = 0.5543$ o sea que $\frac{y}{45} = 0.5543$. De aquí despejando y se obtiene:

$$y = (0.5543)(45)$$

$$\boxed{y = 24.94}$$

NOTA: Cuando se resuelven problemas como el anterior, para plantear la solución se escribe

$$cos\,29 = \frac{45}{r}$$

$$0.87461 = \frac{45}{r} \qquad \text{y se despeja.}$$

Para despejar r se razona de la siguiente manera: El denominador r está dividiendo, por lo tanto, para eliminarlo debe multiplicarse (operación inversa) por r. Pero como está dentro de una igualdad, debe aplicarse la propiedad de las igualdades: *Lo que se haga de un lado debe hacerse también del otro lado.*

Entonces, como se quiere eliminar la r que está dividiendo se multiplican ambos lados de la igualdad por r obteniendo:

$$0.87461(r) = \frac{45}{r}(r)$$

$$0.87461(r) = \frac{45}{\cancel{r}}(\cancel{r})$$

$$0.87461r = 45$$

$$r = \frac{45}{0.87461}$$

$$\boxed{r = 51.45}$$

Para el otro lado para plantear la solución se escribe:

$$tan\, 29 = \frac{y}{45}$$

$$0.5543 = \frac{y}{45} \qquad \text{y se despeja.}$$

Para despejar y se razona de la siguiente manera: El denominador 45 está dividiendo, por lo tanto, para eliminarlo debe multiplicarse (operación inversa) por 45. Pero como está dentro de una igualdad, debe aplicarse la propiedad de las igualdades: *Lo que se haga de un lado debe hacerse también del otro lado.*

Entonces, para eliminar el 45 que está dividiendo se multiplican ambos lados de la igualdad por 45, obteniendo:

$$0.5543(45) = \frac{y}{45}(45)$$

$$0.5543(45) = \frac{y}{\cancel{45}}(\cancel{45})$$

$$24.94 = y$$

Pero como leemos de izquierda a derecha y se quiere saber qué es y, no qué es 24.94, debe invertirse la igualdad anterior:

$$\boxed{y = 24.94}$$

Ejemplo 2: Obtener el valor de los lados desconocidos del siguiente triángulo de la figura 2.11:

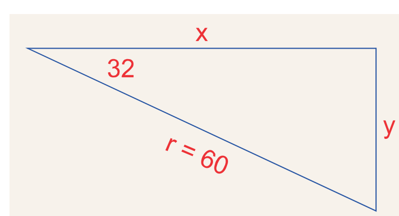


figura 2.11

Solución: Se sabe que la división del lado x entre el lado r = 60 , cuando el ángulo mida 32º, siempre va a dar el mismo valor. Esa división es el cateto adyacente entre la hipotenusa y se llama *coseno*.

$$\cos 32 = \frac{x}{60}$$

de aquí despejando x se obtiene:

$$60 \cos 32 = x$$
$$x = 60 \cos 32$$

$$\boxed{x = 50.88}$$

Por otra parte se sabe que la división del lado y entre el lado r = 60 , cuando el ángulo mida 32º, siempre va a dar el mismo valor. Esa división es el cateto opuesto entre la hipotenusa y se llama *seno*.

$$sen\ 32 = \frac{y}{60}$$

de aquí despejando y se obtiene:

$$60\ sen\ 32 = y$$
$$y = 60\ sen\ 32$$

$$\boxed{y = 31.79}$$

Ejemplo 3: Obtener el valor de los lados desconocidos del siguiente triángulo de la figura 2.12.

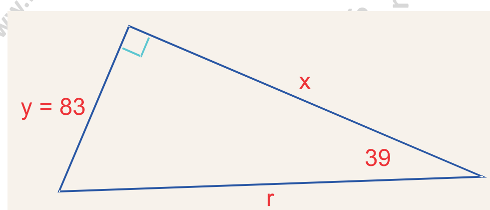


figura 2.12

Solución: Se sabe que la división del lado y = 83 entre el lado x , cuando el ángulo mida 39º, siempre va a dar el mismo valor. Esa división es el cateto opuesto entre en cateto adyacente y se llama *tangente*.

$$\tan 39 = \frac{83}{x}$$

$$0.80978 = \frac{83}{x}$$

$$0.80978x = 83$$

$$x = \frac{83}{0.80978}$$

$$\boxed{x = 102.49}$$

Por otra parte se sabe que la división del lado y = 83 entre el lado r, cuando el ángulo mida 39º, siempre va a dar el mismo valor. Esa división es el cateto opuesto entre la hipotenusa y se llama *seno*.

$$sen\ 39 = \frac{83}{r}$$

$$0.62932 = \frac{83}{r}$$

$$0.62932\ r = 83$$

$$r = \frac{83}{0.62932}$$

$$\boxed{r = 131.88}$$

EJERCICIO 2.1

Encontrar los valores de los dos lados que faltan respecto de la figura 2.13, si se tienen los datos que se señalan en cada problema:

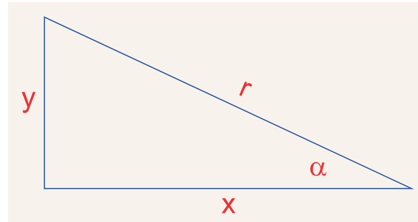


figura 2.13

1) $r = 95$
$\alpha = 55º$

2) $x = 115$
$\alpha = 17º$

3) $y = 12$
$\alpha = 62º$

4) $r = 202$
$\alpha = 80º$

5) $x = 158$
$\alpha = 45º$

6) $y = 84$
$\alpha = 76º$

2.6 FUNCIONES INVERSAS

El problema inverso a todo lo visto anteriormente es: si se sabe el valor del cociente de la división hecha entre dos lados de un triángulo rectángulo, ¿a qué ángulo le corresponde?

Se dijo en la página 38 que la división del lado vertical entre el horizontal, respecto de la figura 2.1 siempre dará 0.714 solamente que el ángulo agudo A mida 35.5º, no importa el tamaño de los lados, sean más grandes o más chicos. El asunto es entonces que si dicha división da ahora, por ejemplo, 0.8390996, ¿cuánto mide el ángulo A?

Como se está dividiendo el cateto opuesto entre el cateto adyacente, a dicha división se le llama *tangente*, lo cual se escribe

$$\tan A = 0.8390996$$

de donde el ángulo A se despeja escribiendo

$$arc\tan A = 0.8390996$$

se lee: *arco tangente de A es igual a* 0.8390996 y significa: *¿La tangente de qué ángulo A es igual a* 0.8390996?

figura 2.14

En la calculadora estas operaciones llamadas funciones trigonométricas inversas están escritas de otro color sobre el chasis y arriba de la tecla de la función trigonométrica correspondiente, como se ve en la figura 2.14. Suelen representarse con la simbología sen^{-1}, cos^{-1} y tan^{-1}.

De manera que tecleando

la calculadora muestra en la pantalla el resultado del ángulo cuya tangente vale 0.8390996, o sea 40, esto es que

$$arc\tan 0.8390996 = 40$$

Ejemplo 4: Obtener el valor del ángulo α conocidos dos lados del siguiente triángulo de la figura 2.15:

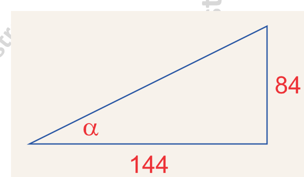


figura 2.15

Solución: La división del cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo α, llamada *tangente*, es

$$\tan \alpha = \frac{84}{144}$$

$$\tan \alpha = 0.58\overline{3}$$

$$\alpha = arc\tan 0.58\overline{3}$$

$$\boxed{\alpha = 30.25}$$

Ejemplo 5: Obtener el valor del ángulo α conocidos dos lados del siguiente triángulo de la figura 2.16:

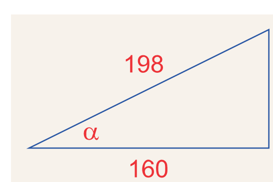


figura 2.16

Solución: La división del cateto adyacente al ángulo α entre la hipotenusa, llamada *coseno*, es

$$\cos\alpha = \frac{160}{198}$$

$$\cos\alpha = 0.\overline{80}$$

$$\alpha = arc\cos 0.\overline{80}$$

$$\boxed{\alpha = 36.09}$$

Ejemplo 6: Obtener el valor del ángulo α conocidos dos lados del siguiente triángulo de la figura 2.17:

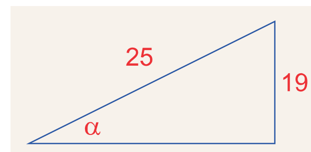


figura 2.17

Solución: La división del cateto opuesto al ángulo α entre la hipotenusa, llamada *seno*, es

$$sen\ \alpha = \frac{19}{25}$$

$$sen\ \alpha = 0.76$$

$$\alpha = arc\,sen\,0.76$$

$$\boxed{\alpha = 49.46}$$

EJERCICIO 2.2

Encontrar el valor del ángulo α respecto de la figura 2.18, si se tienen los datos que se señalan en cada problema:

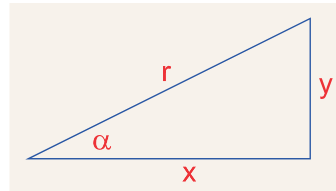


figura 2.18

1) $x = 33$
$y = 33$

2) $x = 38$
$r = 49$

3) $y = 63$
$r = 93$

4) $y = 30$
$x = 74$

5) $r = 53$
$x = 23$

6) $r = 83$
$y = 40$

7) A un rectángulo que inicialmente mide 80 cm. por 40 cm. se le corta una esquina desde su extremo izquierdo hasta quedar como lo muestra la figura 2.19. Calcular el ángulo α de su extremo inferior izquierdo.

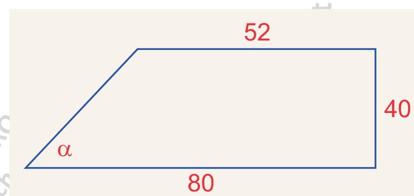


figura 2.19

8) A un rectángulo que inicialmente mide 70 cm. por 32 cm. se le cortan dos de sus esquinas desde sus puntos medios de la base y de la altura como lo muestra la figura 2.20. Calcular el ángulo α que queda en la parte superior después de los cortes.

9) Se construye el triángulo rectángulo ABC de la figura 2.21 con una altura de 152 cm. y un ángulo de 50º en el vértice A. Luego desde el punto medio m de la base AB se traza la mediana mC. Calcular el ángulo α que forma dicha mediana mC con la altura BC. NOTA: No es la mitad del ángulo ACB.

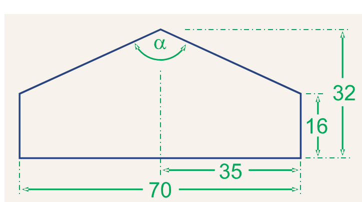


figura 2.20

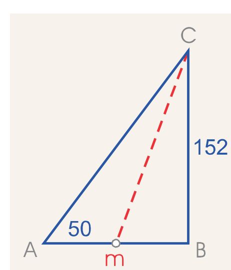


figura 2.21

10) La pirámide de base cuadrangular mostrada en la figura 2.22 tiene una altura de 70 cm. y 50cm. de lado en su base. Calcular el ángulo α que se forma entre la base y cualquiera de sus caras.

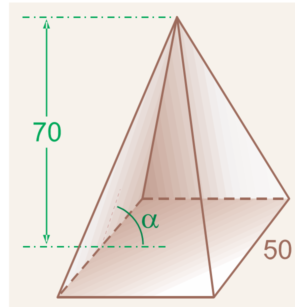


figura 2.22

11) En la pirámide del problema anterior, calcular el ángulo β que se forma entre la base cuadrangular y cualquiera de sus aristas de la unión de dos caras.

12) El costado de una casa con construcción modernista tiene la forma que se ve en la figura 2.23. El techo tiene una inclinación de 25 grados respecto de la horizontal y una longitud de 3.4 metros, con un pequeño volado de 80 centímetros medidos horizontalmente. Desde el final del volado del techo hasta el piso hay una altura de 3.1 metros. La pared frontal tiene cierta inclinación de manera que coincide con el techo a los 80 centímetros desde la base del piso. Calcular la longitud de la pared trasera y el ángulo α de inclinación de la pared inclinada.

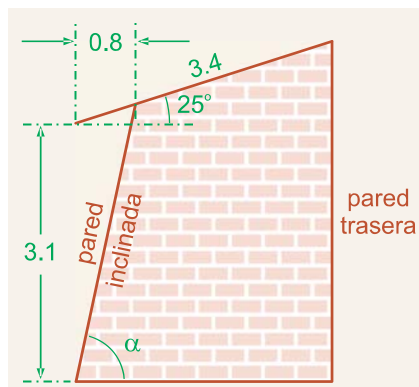


figura 2.23